Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 4

Ausgabe: 11.11.2013
Abgabe : 18.11.2013 **vor** Vorlesungsbeginn

4.1. Aufgabe (10)

Travelling Salesmen

Wir betrachten den vollständigen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $w_{\{u,v\}} \geq 0$ für alle Knoten u, v. Beschreibe einen effizienten Algorithmus, der eine minimale Kreiszerlegung von G bestimmt. In einer minimalen Kreiszerlegung (V, F) von G mit $F \subseteq E$ besitzt jeder Knoten den Grad zwei und die Summe der Gewichte der Kanten in F ist minimal. Zeige, dass Dein Algorithmus korrekt ist.

Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen in dem für jeden Knoten $v \in V$ zwei Kopien $v_\rightarrow, v_\leftarrow$ angelegt werden, eine für v als Startkonten, die andere für v als Endknoten. Du kannst annehmen, dass sich leichteste perfekte Matchings in polynomieller Zeit berechnen lassen. Ein perfektes Matching eines Graphen überdeckt alle Knoten.

Eine minimale Kreiszerlegung kann also effizient bestimmt werden, ein minimaler Kreis hingegen kann noch nicht einmal effizient approximiert werden.

4.2. Aufgabe (3+3+2+2+2+2)

Nearest-Insertion ist 2-approximativ

Wir betrachten das metrische TSP. **Nearest-Insertion** konstruiert im ersten Schritt die Tour $S_1 = \{u \rightarrow u\}$ für einen beliebigen Knoten u. Im i-ten Schritt ($2 \leq i \leq n$) wird zuerst ein neuer Knoten v_i mit geringster Distanz $d(v_i, v)$ zu einem bereits von S_{i-1} besuchten Knoten v gewählt. Mit $c(S_{i-1}, v_i) = \min_{(u \rightarrow w) \in S_{i-1}} d(u, v_i) + d(v_i, w) - d(u, w)$ bezeichnen wir die Verlängerung von S_{i-1} durch Einfügen von v_i: wird für $u \rightarrow w \in S_{i-1}$ das Minimum angenommen, dann setzt Nearest-Insertion $S_i = S_{i-1} \setminus \{u \rightarrow w\} \cup \{u \rightarrow v_i, v_i \rightarrow w\}$.

a) Zeige, dass für jede Subtour S, jeden von S besuchten Knoten v und jeden nicht von S besuchten Knoten v' die Ungleichung $c(S, v') \leq 2 \cdot d(v, v')$ gilt.

   Hinweis: Beachte, dass $c(S, v')$ die *minimale* Verlängerung ist. Wende die Dreiecksungleichung an!

b) Zeige, dass für jeden Schritt i mit $2 \leq i \leq n$, jeden von S_{i-1} besuchten Knoten v und jeden nicht von S_{i-1} besuchten Knoten v' die Ungleichung $c(S_{i-1}, v_i) \leq 2 \cdot d(v, v')$ gilt.

c) Zeige, dass sich die Länge von S_i, für jeden Schritt i, als Summe aller stattgefundenen Verlängerungen darstellen lässt.

d) Ein minimaler Spannbaum M für den Eingabegraphen sei gegeben. Nimm an, dass wir für alle $2 \leq i \leq n$ dem von Nearest-Insertion im i-ten Schritt gewählten Knoten v_i eineindeutig eine Kante e_i aus M zuweisen können, so dass S_{i-1} genau einen Endpunkt von e_i besucht. Zeige, dass Länge$(S_n) \leq 2 \cdot$ Länge(M) gilt.

e) Sei S^* eine kürzeste Rundreise. Zeige, dass Länge$(M) \leq (1 - \frac{1}{n}) \cdot$ Länge(S^*) gilt.

f) Zeige, dass Nearest-Insertion 2-approximativ ist.