Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 1

Ausgabe: 20.10.2016
Abgabe: 27.10.2016, **8:00**

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, den Namen Ihres Tutors und die Gruppennummer sowie den Namen der Veranstaltung **gut lesbar** auf Ihre Abgaben.
- Bitte **tackern** Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.
- Alle Antworten sind zu **begründen**, außer der Aufgabentext erlaubt, dass eine Begründung entfallen darf.
- Durch die Übungen können Sie einen Bonus für die Klausur von bis zu 15 % erwerben. Dieser Bonus wird nur dann angerechnet, wenn Sie mindestens einmal im Semester eine Lösung zu einer Aufgabe in Ihrem Tutorium präsentieren. Bitte beachten Sie auch die Hinweise zum wissenschaftlichen Arbeiten bei Übungsaufgaben auf der Veranstaltungswebseite.
- Weitere Informationen zum Übungsbetrieb und zur Vorlesung finden Sie ebenfalls auf der Webseite: `http://tinygu.de/dismod1617`.

Viel Spaß!

Aufgabe 1.1 *Mit Definitionen arbeiten* $(8 + 11 + 6 = 25$ Punkte)

Die Geschwister Konnie, Katie und Peter haben sehr unterschiedliche Hobbys. Während sich Konnie leidenschaftlich für Mathematik interessiert und Katie am liebsten die ganze Welt programmieren würde, ist ihr jüngerer Bruder Peter, den sie auch „der kleene[1] Piet" nennen, ein begnadeter Astronom. Am liebsten zählt der kleene Piet Himmelskörper wie Sterne, Planeten oder Monde und erstellt für diesen Zweck lange Listen. In seiner Kurznotation erhält jeder Himmelskörpertyp ein eigenes Symbol:

- `G` für Galaxie,
- `A` für Asteroid,
- `M` für Mond,
- `P` für Planet,
- `S` für Stern,
- `N` für Nebel.

Wenn er lange wach bleiben darf, sitzt er im Garten, zählt jedes leuchtende Objekt am Himmel und notiert seine Beobachtungen in seinem DisMond-Logbuch. Beispielsweise steht die Zeichenkette `MPNGGSSSSSM` dafür, dass der kleene Piet zuerst einen Mond, dann einen Planeten, einen Nebel, zwei Galaxien, fünf Sterne und letztlich einen weiteren Mond entdeckt hat. In manchen Nächten zählt der kleene Piet fast ausschließlich Sterne und hat dementsprechend lange Listen der Form `SSSS...SSS`. Als Katie die Vorliebe ihres Bruders für Wiederholungen und Zeichenketten bemerkt, beginnt sie sogleich mit der Planung des computergestützten DisMond-Logbuchs *cgdl*. Konnie schaltet sich ebenfalls ein und entwirft zur einfacheren Eingabe und Verwaltung der Zeichenketten mathematische Operatoren. Zusammen einigen sich die drei Geschwister, dass in der ersten Version von cgdl zwei Operatoren zur Verfügung stehen sollen:

Bitte wenden!

[1] plattdeutsch für „klein"

Definition 1 (KonKat)**.** *Der KonKat-Operator $\boxplus$, benannt nach Konnie und Katie, bildet zwei Zeichenketten u und v auf uv ab:*

$$(u \boxplus v) := uv$$

Definition 2 (Der kleene Stern)**.** *Der kleene Stern $*$, benannt nach dem kleenen Piet und seiner Vorliebe für Sterne, bildet eine Zeichenkette u und eine positive natürliche Zahl k auf die k-fache Wiederholung von u ab:*

$$(u * k) := \underbrace{uu\ldots u}_{k\text{-mal}}$$

So kann in cgdl beispielsweise die Zeichenkette SNSNSNSNSNM kurz als

$$((\mathtt{SN} * 5) \boxplus \mathtt{M}) = (\mathtt{SNSNSNSNSN} \boxplus \mathtt{M}) = \mathtt{SNSNSNSNSNM} \tag{1}$$

dargestellt werden. Wir nennen SNSNSNSNSNM die *Auswertung* von $((\mathtt{SN} * 5) \boxplus \mathtt{M})$.

a) Werten Sie folgende Ausdrücke wie in Gleichung 1 aus. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

i) $\big((\mathtt{GM} \boxplus (\mathtt{S} * 3)) \boxplus \mathtt{PNN}\big)$ ii) $\big((\mathtt{MA} * 1) * 1\big)$ iii) $\big((\mathtt{N} * 2^3) \boxplus (\mathtt{N} * 3^0)\big)$

iv) $\Bigg(\bigg(\mathtt{M} \boxplus \Big(\big((\mathtt{PA} * 2) * 2\big) \boxplus (\mathtt{SG} * 2)\Big)\bigg) \boxplus (\mathtt{M} * 4)\Bigg)$

b) Seien u und v Zeichenketten und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Sind die folgenden Aussagen für jede Wahl von u, v und k wahr? Begründen Sie (wie immer) Ihre Antwort. Für eine falsche Aussage genügt die Angabe eines Gegenbeispiels.

i) $\big((u \boxplus v) \boxplus w\big) = \big(u \boxplus (v \boxplus w)\big)$ ii) $((u * k) \boxplus (v * k)) = ((u \boxplus v) * k)$

iii) Wenn $\big((u \boxplus v) * k\big) = \big((v \boxplus u) * k\big)$ gilt, dann ist $u = v$.

c) Piet benutzt nun auch die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ als Symbole für Himmelsobjekte. Werten Sie auch die folgenden Ausdrücke aus:

i) $\Big(\big((2 * 2) \boxplus (2 * 2)\big) * 2\Big)$ ii) $\big((\mathtt{N4} \boxplus 5) \boxplus (\mathtt{PAG} \boxplus \mathtt{MAN})\big)$ iii) $\Big(\big((0 * 4) \boxplus 7\big) * 2\Big)$

Aufgabe 1.2 *Beweise führen* (21 Punkte)

Beweisen Sie, dass für beliebige Mengen M und N gilt: $(M \cap N) \cup (M \oplus N) = M \cup N$

Hinweis: Seien X und Y Mengen.

- Um eine Inklusion $X \subseteq Y$ nachzuweisen, genügt es, für ein *beliebiges* Element x der Menge X zu zeigen, dass x auch ein Element der Menge Y ist.
- Um die Gleichheit $X = Y$ zu zeigen, genügt der Nachweis der beiden Inklusionen $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

Aufgabe 1.3 *Mit Mengen arbeiten* ($9 \times 3 = 27$ Punkte)

Geben Sie an, welche der Aussagen richtig und welche falsch sind. Geben Sie jeweils (wie immer) auch eine kurze Begründung an.

a) $\emptyset \supseteq \{\emptyset\}$ b) $\emptyset \in \emptyset$ c) $\{\emptyset, 5\} \setminus \emptyset = \{5, \emptyset\}$

d) $\{2, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3\} = \{2, 4\}$ e) $\{1, \{1, 3\}\} \setminus \{1, 3\} = \{1\}$ f) $\emptyset \subsetneq \{\{1, 2\}\} \cap \{2, 1\}$

g) $\{1, 2\} \oplus \{2, 3\} = \{3, 5\}$ h) $\{1, 2, 3\} \subsetneq \{\{1, 2, 3\}\}$ i) $\{\emptyset\} \subsetneq \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4 *Wahlchaos* $(9+9+9=27$ Punkte)

Der Wahlkampf zwischen den beiden Kandidaten Hilarious Clapton und Donna Drumpf für das Amt des Präsidenten des Naturschutzvereins „Unsere singenden Amseln“ stieß weltweit auf großes Interesse. Es gab zwar noch weitere Kandidaten, die jedoch so unbekannt waren, dass die Wahlleitungskommission entschieden hat, bei der Wahl nur die Optionen

☐ Hilarious Clapton ☐ Donna Drumpf ☐ Ich enthalte mich.

anzubieten. Ein Wahlzettel ist *ungültig*, wenn mehr als eine Option angekreuzt wurde (vgl. Abb. 1). Eine Stimme ist *gültig*, wenn der zugehörige Wahlzettel nicht ungültig ist.

Präsidentschaftswahl 2016
☒ Hilarious Clapton
☒ Donna Drumpf
☐ Ich enthalte mich.

Abbildung 1: Ein ungültiger Wahlzettel mit zwei Stimmen

Heute ist der Abend des Wahltages. Es wurden $|C| = 30$ Stimmen für Clapton, $|D| = 33$ Stimmen für Drumpf und $|E| = 35$ Enthaltungen gezählt, wobei C, D bzw. E die Mengen der Wahlzettel bezeichne, auf denen für **C**lapton, **D**rumpf bzw. **E**nthaltung gestimmt wurde. Außerdem liegen die folgenden Daten vor:

$$|E \setminus (C \cup D)| = 13 \qquad |D \cap E| = 14 \qquad |(C \cap D) \setminus E| = 7 \qquad |C \cap D \cap E| = 3$$

Aber wer hat die meisten gültigen Stimmen erhalten? Gehen Sie davon aus, dass leere Wahlzettel, d. h. Wahlzettel auf denen keine der drei Optionen angekreuzt wurde, vor der Auszählung der Stimmen aussortiert wurden.

Berechnen Sie zunächst $|(D \cap E) \setminus C|$ und $|(C \cap E) \setminus D|$ und beantworten Sie dann folgende Fragen:

a) Wie viele (ausgefüllte) Wahlzettel wurden insgesamt abgegeben?

b) Wie viele ungültige Wahlzettel wurden abgegeben?

c) Hat Clapton mehr gültige Stimmen erhalten als Drumpf?

Hinweis: Ein Venn-Diagramm könnte sich als hilfreich erweisen.