Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 13

Ausgabe: 26.01.17
Abgabe: 02.02.17

Aufgabe 13.1 *Grenzen der Regularität* $(13 + 13 = 26$ Punkte$)$

Definition: Für ein Alphabet Σ, einen Buchstaben $\sigma \in \Sigma$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|_\sigma$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens σ im Wort w.
Zum Beispiel gilt $|aababa|_a = 4,\ |aababa|_b = 2$ und $|aababa|_c = 0$.

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill-Nerode II, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

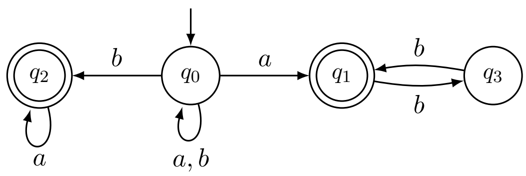
a) $L_1 := \{ w \in \{a,b\}^* : |w|_a < |w|_b \}$ über $\Sigma = \{a, b\}$

b) $L_2 := \{ aba^2ba^3b \cdots a^nb : n \in \mathbb{N}_{>0} \}$ über $\Sigma = \{a, b\}$

Hinweis: Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von Worten, die paarweise nicht-äquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind, und weisen Sie Nicht-Äquivalenz durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

Aufgabe 13.2 *NFAs und die Potenzmengenkonstruktion* $((4+4+8+2) + 6 = 24$ Punkte$)$

a) Sei A_1 der folgende NFA über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:



i) Welche der folgenden Worte liegen in $L(A_1)$, welche nicht?

$w_1 := \varepsilon$ $\qquad$ $w_2 := a$ $\qquad$ $w_3 := aba$ $\qquad$ $w_4 := bbab$

ii) Beschreiben Sie (mathematisch oder umgangssprachlich) die Sprache $L(A_1)$.
Hinweis: Überlegen Sie sich hierfür zunächst, welche Worte nicht in $L(A_1)$ liegen.

iii) Konstruieren Sie mithilfe der Potenzmengenkonstruktion einen DFA A_2, der dieselbe Sprache wie der NFA A_1 akzeptiert. Berücksichtigen Sie in A_2 nur solche Zustände, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind.

iv) Ist A_2 minimal?

b) Konstruieren Sie einen NFA A_3, der die folgende Sprache L_3 akzeptiert:

$L_3 := \{uav : u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^2\} = \{w \in \{a,b\}^* :$ der **drittletzte** Buchstabe von w ist ein $a\}$.

Aufgabe 13.3 *Reguläre Ausdrücke* ($18 + 9 + 10^* = 27 + 10^*$ Punkte)

a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke:

$$R_1 := (a|b)^*a(b|\varepsilon) \qquad R_2 := (a|b)\big(aa\big)^* \qquad R_3 := (b^*ab^*ab^*ab^*)^*$$

   i) Welche der Worte $w_1 := \varepsilon$ und $w_2 := aab$ liegen in $L(R_1)$, $L(R_2)$ bzw. $L(R_3)$, welche nicht? Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

   ii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_1)$, $L(R_2)$ und $L(R_3)$ umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

   i) $L_1 := \{a, b\}^3$

   ii) $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \leq 2\}$

   iii) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ endet nicht auf } ba\}$

c∗) In der Vorlesung „Theoretische Informatik 2“ wird gezeigt, dass eine Sprache L genau dann regulär ist, wenn ein regulärer Ausdruck R mit $L(R) = L$ existiert.

Zeigen Sie mithilfe regulärer Ausdrücke, dass jede endliche Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ regulär ist.

Aufgabe 13.4 *Kontextfreie Grammatiken* ($12 + 11 + 10^* = 23 + 10^*$ Punkte)

a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G := (\Sigma, V, S, P)$ mit

$$V := \{S, A, B\}, \quad \Sigma := \{0, 1\}, \quad P := \big\{S \to A \,|\, B, \quad A \to 0A1 \,|\, 0A \,|\, 0, \quad B \to 0B1 \,|\, B1 \,|\, 1\big\}.$$

   i) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $w_1 := 0001$ an.

   ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $w_2 := 00111$ an.

   iii) Beschreiben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ mathematisch oder umgangssprachlich.

b) Die Klammersprache K über dem Alphabet $\Sigma := \{\,[\,,\,]\,,\ \langle\,,\,\rangle\,\}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

   (B) $\varepsilon \in K$

   (R1) Ist $w \in K$, dann ist auch $[w] \in K$.

   (R2) Ist $w \in K$, dann ist auch $\langle w \rangle \in K$.

   (R3) Ist $u \in K$ und ist $v \in K$, dann ist auch $uv \in K$.

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G_K für die Klammersprache K.

c∗) Bei der Sportart Parkour[1] sind mithilfe verschiedener Fortbewegungselemente Strecken in städtischer Umgebung möglichst elegant und effizient zurückzulegen. Ein Traceur (Parkour-Läufer) führt in einem Parkour-Lauf im Wesentlichen die folgenden Aktionen aus:

   l **L**aufen, eine wenig spektakuläre und daher verpönte Art der Fortbewegung

   r **R**ollen, in der Regel über die Schulter, um die Landung nach einem Sprung abzufedern

   s **S**pringen, z. B. vom Dach eines Hauses auf einen Balkon eines Nachbarhauses

   v **V**aulting, ein Hindernis durch einen Sprung unter Zuhilfenahme der Hände überwinden

   w **W**allclimbing, eine Mauer emporklettern

[1] Ein populäres Parkour-Video finden Sie unter `https://www.youtube.com/watch?v=yMmrDpsYr0s`.

Jede solche Aktion kann auch wiederholt in einem Lauf vorkommen. Ein Parkour-Lauf kann somit als Wort $p \in \Sigma^*$ mit $\Sigma := \{\mathrm{l}, \mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\}$ modelliert werden.

Zwar behaupten die Traceurs, dass ihre Aktionen sehr auf die jeweilige Umgebung abgestimmt sind, aber die Hersteller von Fitness-Armbändern haben durch intensive algorithmengestützte Auswertung der gesammelten Fitness-Daten herausgefunden, dass jeder Parkour-Lauf nur nach den folgenden Regeln aufgebaut ist:

1. Zu Beginn läuft der Traceur, springt anschließend, rollt über die Schulter und läuft weiter.

Außerdem sind folgende Ersetzungen erlaubt:

2. Rollen darf immer ersetzt werden durch zweimaliges, unmittelbar aufeinanderfolgendes Rollen.
3. Laufen darf stets ersetzt werden durch
   - Laufen, gefolgt von Springen und anschließendem Abrollen oder
   - Laufen, eine Vaulting-Aktion und weiteres Laufen.
4. Vaulting darf stets durch Wallclimbing ersetzt werden.
5. Rollen, Springen, Vaulting und Wallclimbing dürfen stets ersatzlos gestrichen oder durch Laufen ersetzt werden.

Sei Parkour $\subseteq \Sigma^*$ die durch die obigen Regeln beschriebene Sprache aller möglichen Parkour-Läufe. Es gilt beispielsweise lsrl $\in$ Parkour, lsrrl $\in$ Parkour und lwlsrl $\in$ Parkour.

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G_{Parkour}, die genau die Sprache Parkour der oben beschriebenen Parkour-Läufe beschreibt, d. h. es soll $L(G_{\text{Parkour}}) = \textsc{Parkour}$ gelten. Erläutern Sie auch kurz Ihre Notation.