Allgemeine Hinweise

(a) Bereiten Sie sich durch **aktives** Lernen auf die Klausur vor.
- Bearbeiten Sie Übungsaufgaben, für die Sie wenige Punkte erhalten haben, andere Aufgaben aus dem Skript oder aus Textbüchern.
  - Alle Aufgaben der Klausur lehnen sich an Übungsaufgaben an, die in diesem Semester gestellt wurden.
- Bearbeiten Sie den „Fragenkatalog“ eigenständig ohne das Skript zu rate zu ziehen,
- Arbeiten Sie frühere Klausuren selbstständig durch.

(b) Sofort fragen, wenn Sie eine Aufgabenstellung nicht verstehen.

(c) Zeitmanagement:
- Die Klausur dauert 120 Minuten. Zeitansagen erfolgen, wenn noch 60, 30, 15 bzw. 5 Minuten verbleiben.
- Innerhalb einer jeden Aufgabe sind die verschiedenen Aufgabenteile nach Schwierigkeitsgrad geordnet.
- Lösen Sie zuerst nur die Aufgaben, die keine nennenswerten Schwierigkeiten bereiten.

(d) Kurze (richtige) Antworten sind gute Antworten.

Themen der Klausur (1/2)

(a) Grundlagen: Mengen, kartesische Produkte, Relationen, Funktionen.

(b) Mindestens eine vollständige Induktion wird in den folgenden Bereichen vorkommen. Andere Beweistypen kommen ebenfalls vor.

(c) Aussagenlogik ($\approx$ 20-25%)

- Umgangssprachliche Aussagen in aussagenlogische Formeln übersetzen.
- Wann ist ϕ „erfüllbar“, „allgemeingültig“, „unerfüllbar“ oder „falsifizierbar“?
- Wann gilt $\phi \models \psi$ bzw. $\phi \equiv \psi$?
- Wie bestimmt man die DNF bzw. die KNF einer Formel ϕ?
  - Unerfüllbarkeit von KNFs: Anwendung der Resolution.

(d) Graphen und Bäume ($\approx$ 20-25%)

- Grapheigenschaften: bipartit, zusammenhängend, stark zusammenhängend, planar, vollständig bzw. vollständig bipartit, Graphisomorphie
- Graphprobleme: Matching, Euler- und Hamiltonwege und -kreise, das Färbungsproblem und die chromatische Zahl.
- Modellierung mit Graphen oder Bäumen.

Themen der Klausur (2/2)

(e) Markov-Ketten ($\approx 20\%$)

- Page-Rank und Zufalls-Surfer.
- Stationäre Verteilungen – wie rechnet man sie aus? Grenzverteilungen.
- Aperiodische, irreduzible und ergodische Ketten.
- Modellierung mit Markov-Ketten

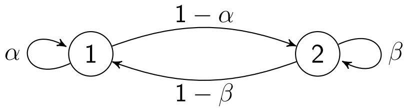
(f) Endliche Automaten ($\approx 30\%$)

- DFAs und der Minimierungsalgorithmus: Die Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ und Zeugen.
- Der Index der Nerode-Relation und der Nerode-Automat.
- Der Satz von Myhill-Nerode: Welche Sprachen sind nicht regulär, bzw. wieviele Zustände benötigt ein DFA mindestens?
- DFAs, NFAs und reguläre Ausdrücke bauen bzw. verstehen.

(g) Kontextfreie Grammatiken ($\approx$ 5-10%)

- Welche Sprache erzeugt eine gegebene kontextfreie Grammatik?
- Konstruktion kontextfreier Grammatiken.
- Ableitungen und Ableitungsbäume.

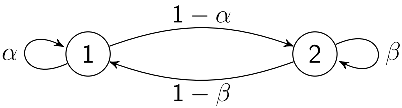
Wann ist die Kette ergodisch?



Wie sehen die stationären Verteilungen aus, wenn $\alpha \neq 1 \neq \beta$?

Die Übergangsmatrix der Kette heiße P.

Stationäre Verteilungen: Welches Gleichungssystem?



Eine Verteilung $\sigma = (x, y)$ ist genau dann stationär, wenn $\sigma \cdot P = \sigma$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot P \quad &= \quad (\, x \,,\, y \,) \;\cdot\; \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \\
&= \quad (\; x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta), \quad x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta \;) \\
&\stackrel{!}{=} \quad \sigma = (\, x, y \,)\,.
\end{aligned}$$

Also führt die Forderung $\sigma P \stackrel{!}{=} \sigma$ auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta) \quad &\stackrel{!}{=} \quad x \\
x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta \quad &\stackrel{!}{=} \quad y.
\end{aligned}$$

Huch!

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot \alpha + y \cdot (1-\beta) &\overset{!}{=} x \\ x \cdot (1-\alpha) + y \cdot \beta &\overset{!}{=} y. \end{aligned}$$

ist äquivalent mit

$$x \cdot (1-\alpha) = y \cdot (1-\beta).$$

Wir erhalten einen ein-dimensionalen Lösungsraum: Was ist passiert?

Wenn $\sigma \cdot P = \sigma$, dann gilt auch $\lambda\sigma \cdot P = \lambda\sigma$ für jedes Vielfache $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir müssen fordern, dass σ eine Verteilung ist, d.h. das $x + y = 1$ gilt.

Und die Lösung ist:

Wir erhalten das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot (1-\alpha) &= y \cdot (1-\beta) \\ y &= 1-x \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$x = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \text{ und } y = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einen Zustand zu erreichen ist proportional zu der Komplementärwahrscheinlichkeit im anderen Zustand zu verbleiben.

Und wann ist die Gleichverteilung stationär?