

# Der Kalkül der Mengen

# Präzise beschreiben und argumentieren: Aber wie?

- In welcher Sprache sollten wir versuchen, komplexe Sachverhalte vollständig und eindeutig zu beschreiben?
  - ▶ Natürliche Sprachen erlauben Beschreibungen mit einer Vielzahl häufig unerwünschter Interpretationen.
- In welcher Sprache und nach welchen Regeln sollten zum Beispiel Korrektheitsbeweise geführt werden?
  - ▶ Die Sprache und die Schlussregeln der Mathematik sind an Klarheit und Korrektheit des Schließens nicht zu übertreffen.
- Mit Hilfe des Kalküls der **Mengen** werden wir **Relationen** und **Funktionen** einführen und über **Folgen** und **Worte** sprechen können.
  - ▶ Wir können komplexe Sachverhalte präzise beschreiben!
- Dann werden wir beginnen, Beweise zu verstehen und eigenständig zu führen.
  - ▶ Wir argumentieren (und führen Korrektheitsbeweise) mit den Schlußregeln der Mathematik.

Symbol	Bedeutung
{, }	Mengenklammern z.B. besteht die Menge $\{1, 2, 3\}$ aus den Elementen 1,2,3
:=	Definition eines Wertes, z.B. $x := 5$ , $M := \{1, 2, 3\}$
$:\Leftrightarrow$	Definition einer Eigenschaft oder einer Schreibweise z.B. $m \in M :\Leftrightarrow m$ ist Element von $M$
ex.	Abkürzung für „es gibt“, „es existiert“
f.a.	Abkürzung für „für alle“, „für jedes“
s.d.	Abkürzung für „so, dass“
$\Rightarrow$	Abkürzung für „impliziert“ z.B.: Regen $\Rightarrow$ nasse Straße
$\Leftrightarrow$	Abkürzung für „genau dann, wenn“ z.B.: Klausur bestanden $\Leftrightarrow$ $z \geq 50\%$ für die nach Klausur und Übungen erreichte Prozentzahl $z$
□	markiert das Ende eines Beweises

# Modellierung der Karten eines (Skat-)Kartenspiels

Warum sind wir an Mengen und Operationen auf Mengen interessiert?

Weil wir mit dem Kalkül der Mengen vieles beschreiben können, wie zum Beispiel die Karten eines Skat-Kartenspiels:

$$\begin{aligned}\text{KartenArten} &:= \{ \text{Kreuz, Pik, Herz, Karo} \} \\ \text{KartenSymbole} &:= \{ 7, 8, 9, 10, \text{Bube, Dame, König, Ass} \} \\ \text{Karten} &:= \{ (\text{Kreuz}, 7), (\text{Kreuz}, 8), \dots, (\text{Kreuz}, \text{Ass}), \\ &\quad (\text{Pik}, 7), (\text{Pik}, 8), \dots, (\text{Pik}, \text{Ass}), \\ &\quad (\text{Herz}, 7), (\text{Herz}, 8), \dots, (\text{Herz}, \text{Ass}), \\ &\quad (\text{Karo}, 7), (\text{Karo}, 8), \dots, (\text{Karo}, \text{Ass}) \}.\end{aligned}$$

Aber die Menge der Karten stimmt überein mit allen möglichen **Paaren** einer Kartenart und eines Kartensymbols. Wir **möchten** deshalb kürzer schreiben:

$$\text{Karten} = \text{Kartenarten} \times \text{Kartensymbole}.$$

Was sind Mengen?

# Das ist doch klar, oder?

Wir schreiben

$$m \in M,$$

um auszusagen, dass  $M$  eine Menge ist und dass  $m$  ein Element der Menge  $M$  ist.

Wir schreiben

$$m \notin M,$$

um auszusagen, dass  $m$  kein Element der Menge  $M$  ist.

Wir definieren  $\emptyset$  als die leere Menge, also als die Menge ohne Elemente.

$\mathbb{N}$  := Menge der natürlichen Zahlen :=  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_{>0}$  := Menge der positiven natürlichen Zahlen :=  $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  := Menge der ganzen Zahlen :=  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$  := Menge der rationalen Zahlen :=  $\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$  := Menge der reellen Zahlen.

# Die Russelsche Antinomie



# Mal etwas völlig anderes?

Im Städtchen Sonnenthal,

in dem bekanntlich viele seltsame Dinge passieren,

wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner von Sonnenthal rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Rasiert der Barbier sich selbst?

## Bertrand Russel, 1872–1970

Sei  $N$  die Menge aller Mengen  $M$ , die sich nicht selbst enthalten, d.h.

$$M \in N : \iff M \text{ ist eine Menge, für die gilt: } M \notin M.$$

**Frage:** Enthält  $N$  sich selbst, d.h. gilt  $N \in N$ ?

- Klar: Entweder es gilt  $N \in N$  oder es gilt  $N \notin N$ .
- Fall 1:  $N \notin N$ .  
Gemäß Definition der Menge  $N$  gilt dann  $N \in N$ : **Widerspruch**.
- Fall 2:  $N \in N$ .  
Gemäß Definition der Menge  $N$  gilt dann  $N \notin N$ : **Widerspruch**.

## Und nu?

Die Menge  $N$  existiert nicht!

In der **Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre** stellt eine Axiomatisierung der Mengenlehre **wahrscheinlich** sicher, dass keine Antinomien auftreten.

- Entschuldigung: Es treten wahrscheinlich(!?!) keine Antinomien auf?
- Die Widerspruchsfreiheit der vollen Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre kann ohne weitere Annahmen nicht gezeigt werden :-((

Und wie soll man Mengen beschreiben?

Eine Diskussion der Zermelo-Fraenkel-Axiomatisierung sprengt den Rahmen dieser Vorlesung und ist auch gar nicht erforderlich.

Stattdessen beschreiben wir Mengen „**extensional**“ (bzw. **explizit**) durch Aufzählung ihrer Elemente

$$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

oder „**intensional**“ (bzw. **implizit**) durch

1. Angabe einer bereits definierten Obermenge und
2. einer Beschreibung der Eigenschaft ihrer Elemente.

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Primzahl und } n \leq 22\}.$$

(Lies den Doppelpunkt als „so dass“). Beachte, dass wir in der Definition der Menge  $M$  auf die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen Bezug nehmen.

Angenommen, wir haben die Menge  $A$  bereits definiert. Wie beschreiben wir die Menge  $B$  aller Elemente aus  $A$ , die die Eigenschaft  $E$  besitzen?

Wir schreiben

$$B = \{x \in A : x \text{ hat Eigenschaft } E\}, \text{ bzw.}$$

$$B = \{x : x \in A \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } E\}.$$

Weitere Konventionen:

- (a) In der Literatur wird manchmal ein vertikaler Strich statt des Doppelpunkts verwendet, also  $B = \{x \in A \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ .
- (b) In der Beschreibung der Eigenschaft der Elemente verwendet man manchmal ein Komma statt eines „und“. Also

$$B = \{x \in A : x \text{ hat Eigenschaft } E_1, x \text{ hat Eigenschaft } E_2\}$$

statt

$$B = \{x \in A : x \text{ hat Eigenschaft } E_1 \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } E_2\}.$$

# Beispiele: Worauf muss man achten?

- $\{ n : n \text{ ist eine Quadratzahl} \}$  ist nicht vollständig definiert:  $n$  könnte eine natürliche, rationale oder reelle Zahl sein. Die richtige Definition ist

$$\{ n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Quadratzahl} \}.$$

- Gibt es eine größte Menge, also die „Menge“

$$U := \{ M : M \text{ ist eine Menge} \}$$

aller Mengen? Wenn  $U$  eine Menge ist, dann ist auch

$$N = \{ M \in U : M \notin M \}$$

eine Menge, und das haben wir widerlegt.

- ?  $S$  ist die Menge aller männlichen Einwohner von Sonnenthal.  
Bestimme die Menge

$$X = \{ B \in S : B \text{ rasiert alle Männer in } S, \text{ die sich nicht selbst rasieren} \}.$$

# Worauf muss ich noch achten?

- Ein Element kommt genau in einer Menge vor, wenn es mindestens einmal vorkommt:

$$\{5\} = \{5, 5\} = \{5, 5, 5\} = \{5, 5, 5, 5\} = \dots$$

- Elemente haben keine bestimmte „Position“ in ihrer Menge: Die folgenden Beschreibungen führen alle auf dieselbe Menge

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 2\}.$$

- Mengen können durchaus aus „verschiedenartigen“ Elementen zusammengesetzt sein:

$$X = \{1, A, (\text{Pik}, 8), \{ \text{rot}, \text{blau} \} \}$$

ist eine stinknormale Menge. Übrigens, aus welchen Elementen besteht  $X$ ?



# Mengen in Python

- ① Extensional definierte Mengen wie etwa  $M = \{1, a, A, 2017\}$  werden mit

$$M = \{ 1, 'a', 'A', 2017 \}$$

in Python eingeführt.  $M$  besitzt den Datentyp `set`.

- ② Für ein Python-Objekt  $I$  definiert die Python-Anweisung

$$M = \text{set}(I)$$

ein Objekt vom Datentyp *Menge*, das genau die „Elemente“ von  $I$  als Elemente besitzt.  $I$  muss ein iterierbares Objekt – wie Listen (`list`), Tupel (`tuple`), Strings (`str`), Dictionaries (`dict`), Ranges (`range`) etc.– mit „hashbaren“ Elementen sein.

- ③ Die leere Menge wird durch  $M = \text{set}()$  eingeführt.

## Beispiele:

- ▶ `M = set(['Frankfurt', 'Offenbach'])` führt auf die Menge  $M = \{\text{Offenbach}, \text{Frankfurt}\}$ ,
- ▶ `M = set('Frankfurt')` führt auf  $M = \{k, u, n, a, r, F, f, t\}$ .

- (a) Ist  $M$  ein Objekt vom Datentyp `set`, dann liefert der Funktionsaufruf

```
x in M
```

den Wert `True`, wenn  $x$  ein Element von  $M$  ist und ansonsten `False`.

- (b) Die „For-Schleife“

```
for x in M:
```

durchläuft die Elemente von  $M$  in irgendeiner Reihenfolge.

- 1 `M.add(e)` fügt das Element  $e$  der Menge  $M$  hinzu.
- 2 `M.remove(e)` entfernt  $e$  – falls enthalten – aus  $M$ .  
(Falls  $e$  nicht in  $M$  enthalten ist, wird eine Fehlermeldung gegeben.)
- 3 `M.discard(e)` entfernt das Element  $e$  aus  $M$ .  
(Keine Fehlermeldung, falls  $e$  nicht in  $M$  enthalten ist.)

Bestimme die Menge

$$N = \{x \in M : E(x)\}$$

für eine Python-Funktion  $E()$ .

Benutze den Python-Code

```
1. N = set()
2. for x in M:
    if E(x):
        N.add(x)
```

# Python: Achtung bei Mengenzuweisungen!

Was passiert?

```
1. M = { 1,2,3,4 }
2. N = M
3. M.discard(1)
   ? print(N)
4. N.discard(2)
   ? print(M)
```

Nach der Zuweisung `N = M` zeigen M und N auf dieselbe Menge!

Will man das vermeiden, benutze stattdessen

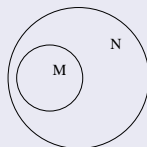
```
N = M.copy()
```

# Teilmengen, Obermengen und Mengengleichheit

## DEFINITION

- (a) Die Menge  $M$  ist eine **Teilmenge** der Menge  $N$  (kurz:  $M \subseteq N$ ), wenn jedes Element von  $M$  auch ein Element von  $N$  ist. Kurz: f.a.  $x \in M$  gilt  $x \in N$ .

Skizze:



- (b)  $M$  ist eine **Obermenge** von  $N$  (kurz:  $M \supseteq N$ ), wenn  $N \subseteq M$  gilt.

Sei  $N$  eine beliebige Menge. Gilt  $\emptyset \subseteq N$ ?

Die Implikation

„wenn  $x$  ein Element der leeren Menge ist, dann ist  $x$  auch ein Element von  $M$ “

ist wahr, da die Voraussetzung  $x \in \emptyset$  stets falsch ist.

## DEFINITION

Wir sagen, dass zwei Mengen  $M$  und  $N$  genau dann **gleich** sind (kurz  $M = N$ ), falls sie dieselben Elemente enthalten, d.h. falls gilt:

- f.a.  $x \in M$  gilt  $x \in N$  – d.h. falls  $M \subseteq N$  – und
- f.a.  $x \in N$  gilt  $x \in M$  – d.h. falls  $N \subseteq M$ .

(a) Es ist  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ , denn

- ▶ die leere Menge  $\emptyset$  hat keine Elemente,
- ▶ die Menge  $\{\emptyset\}$  hat aber genau ein Element, nämlich die leere Menge  $\emptyset$ .

(b) Es gibt genau eine leere Menge!

- ▶ Angenommen sowohl die Menge  $M$  wie auch die Menge  $N$  ist leer.
- ▶ Da  $M$  leer ist: f.a.  $x \in M$  gilt  $x \in N$ .
- ▶ Da  $N$  leer ist: f.a.  $x \in N$  gilt  $x \in M$ .
- ▶ Also folgt  $M = N$ .

Also gilt  $M = N \iff M \subseteq N$  und  $N \subseteq M$ .



- (a) Wenn wir die Teilmengenbeziehung (oder Inklusion)

$$M \subseteq N$$

zeigen wollen, dann ist es oft von Vorteil für ein **beliebiges** Element  $m$  von  $M$  nachzuweisen, dass  $m$  auch ein Element von  $N$  ist.

- (b) Wenn wir die Gleichheit

$$M = N$$

zeigen wollen, dann genügt der Nachweis der Teilmengenbeziehungen

$$M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M.$$

# Wie zeigt man Beziehungen zwischen Mengen?

$M, N$  und  $P$  seien Mengen. Wenn  $M \subseteq N$  und  $N \subseteq P$ , dann folgt

$$M \subseteq P.$$

Und wie zeigt man das? Siehe Tafel.

## DEFINITION

- (a)  $M$  ist eine **echte Teilmenge** von  $N$  (kurz:  $M \subsetneq N$ ), wenn  $M \subseteq N$  und  $M \neq N$  gilt.
- (b)  $M$  ist eine **echte Obermenge** von  $N$  (kurz:  $M \supsetneq N$ ), wenn  $M \supseteq N$  und  $M \neq N$  gilt.

# Python: Teilmengen, Obermengen und Mengengleichheit

M und N seien Python-Objekte vom Datentyp *Menge*.

Wenn festgestellt werden soll, ob

- 1 M eine (echte) Teilmenge von N ist, benutze

`M.issubset(N)` „oder“ `M <= N` (bzw. `M < N` )

- 2 M eine (echte) Obermenge von N ist, benutze

`M.issuperset(N)` „oder“ `M >= N` (bzw. `M > N` )

- 3 M und N gleich sind, benutze

`M == N`

# Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Komplementbildung

## DEFINITION

Seien  $M$  und  $N$  Mengen.

(a) Der **Durchschnitt** von  $M$  und  $N$  ist die Menge

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N \}.$$

(b) Die **Vereinigung** von  $M$  und  $N$  ist die Menge

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N \}.$$

(c) Die **Differenz** von  $M$  und  $N$  ist die Menge

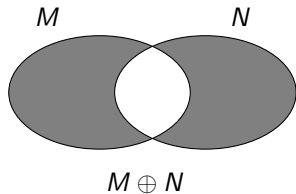
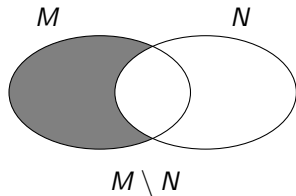
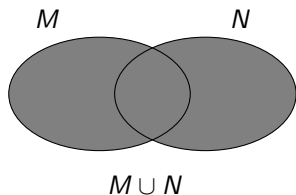
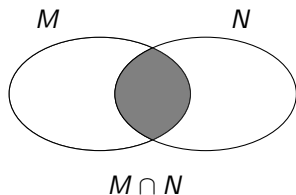
$$M \setminus N := M - N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N \}.$$

(d) Die **symmetrische Differenz** von  $M$  und  $N$  ist die Menge

$$M \oplus N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M).$$

Es ist  $M \subseteq M \cup N$  und  $M \cap N \subseteq M$ .

# Veranschaulichung durch Venn-Diagramme



# Python: Operationen auf Mengen

Wenn  $M$  und  $N$  den Datentyp Menge besitzen, dann wird

- 1 der Durchschnitt  $K = M \cap N$  von  $M$  und  $N$  beschrieben durch

`K = M.intersection(N)` „oder durch“ `K = M & N`

- 2 die Vereinigung  $K = M \cup N$  von  $M$  und  $N$  beschrieben durch

`K = M.union(N)` „oder durch“ `K = M | N`

- 3 die Mengendifferenz  $K = M \setminus N$  beschrieben durch

`K = M.difference(N)` „oder durch“ `K = M - N`

- 4 und die symmetrische Differenz  $K = M \oplus N$  beschrieben durch

`K = M.symmetric_difference(N)` „oder durch“ `K = M ^ N`

- 5  $M$  und  $N$  sind disjunkt, wenn

`M.isdisjoint(N)`

den Wert `True` ausgibt.



Seien  $M, N, P$  Mengen. Dann gelten:

(a) **Idempotenz:**

$$M \cap M = M \quad \text{und} \quad M \cup M = M.$$

(b) **Kommutativität:**

$$M \cap N = N \cap M \quad \text{und} \quad M \cup N = N \cup M.$$

(c) **Assoziativität:**

$$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P \quad \text{und} \quad M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P.$$

(d) **Absorption:**

$$M \cap (M \cup N) = M \quad \text{und} \quad M \cup (M \cap N) = M.$$

(e) **Distributivität:**

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P) \quad \text{und} \quad M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P).$$

# Komplementbildung

Das **Komplement** einer Menge  $M$  (kurz:  $\overline{M}$ ) soll die Menge aller Elemente sein, die **nicht** zu  $M$  gehören.

Aber Vorsicht: Wenn wir einfach

$$\overline{M} := \{x : x \notin M\}$$

setzen, so gilt für die leere Menge  $\emptyset$ , dass ihr Komplement  $\overline{\emptyset}$  **alles** enthält und dann wäre

$$\{M : M \in \overline{\emptyset}\}$$

die „Menge aller Mengen“, und die kann es nicht geben!

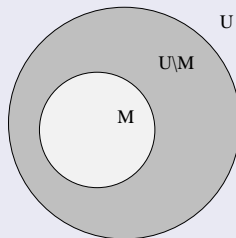
Daher betrachten wir Mengen stets innerhalb eines **Universums**  $U$ , wobei  $U$  natürlich selbst eine Menge sein muss.

## DEFINITION

Für  $M \subseteq U$  setzen wir

$$\overline{M} := U \setminus M$$

und bezeichnen  $\overline{M}$  als das Komplement von  $M$  in  $U$ .



# Rechenregeln für Komplemente

Die Menge  $U$  sei unser Universum. Ferner seien  $M, N \subseteq U$  Teilmengen von  $U$ . Dann gelten:

(a) **Doppelte Negation**

$$\overline{(\overline{M})} = M.$$

(b) Die **De Morgansche Regeln**:

$$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N} \quad \text{und} \quad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}.$$

(c) **Inversionsregeln**:

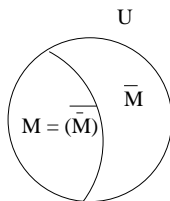
$$M \cap \overline{M} = \emptyset \quad \text{und} \quad M \cup \overline{M} = U.$$

(d) **Identitätsregeln**:

$$M \cap U = M \quad \text{und} \quad M \cup \emptyset = M.$$

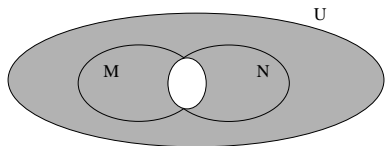
# Und nochmal Venn-Diagramme

- Doppelte Negation:

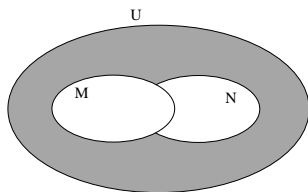


- De Morgansche Regeln:

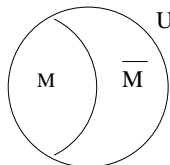
$$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$



$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$$



- Inversionsregel:



# Die Potenzmenge

## DEFINITION

Die **Potenzmenge** (engl.: power set) einer Menge  $M$  (kurz:  $\mathcal{P}(M)$ ) ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ . D.h.:

$$\mathcal{P}(M) := \{X : X \subseteq M\}.$$

Man schreibt auch manchmal

$$2^M := \{X : X \subseteq M\}.$$

Rechnen wir einige Beispiele durch:

- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$  Insbesondere gilt also:  $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset.$



- ? Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer Menge mit  $n$  Elementen?
- ? Ist die Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  auch für unendliche Mengen  $X$  immer „größer“ als  $X$ ?

# Das kartesische Produkt, Paare und Tupel als neue Datentypen

## DEFINITION

- (a) Für beliebige Objekte  $a$  und  $b$  bezeichnet  $(a, b)$  das **geordnete Paar** mit Komponenten  $a$  und  $b$ .
- (b) Für  $k \in \mathbb{N}$  und beliebige Objekte  $a_1, \dots, a_k$  bezeichnet  $(a_1, \dots, a_k)$  das  **$k$ -Tupel** (bzw. den **Vektor** oder die **Folge**) mit Komponenten  $a_1, \dots, a_k$ .
- Für  $k = 0$  ist  $()$  das **leere Tupel**.
- (c) Die **Gleichheit** zweier Tupel ist wie folgt definiert:  
F.a.  $k, \ell \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$  gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_\ell) :\iff k = \ell \text{ und } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k.$$

Beachte den Unterschied zwischen Tupeln und Mengen: z.B.

- $(1, 2) \neq (2, 1)$ , aber  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ .
- $(1, 1, 2) \neq (1, 2)$ , aber  $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ .

## DEFINITION

- (a) Sei  $k \geq 2$  und sei  $M$  eine Menge. Die  **$k$ -te Potenz** von  $M$  ist die Menge

$$M^k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M, \dots, m_k \in M \}.$$

- ▶ Für  $k = 0$  ist  $M^0 := \{()\}$ . Also besteht  $M^0$  nur aus dem leeren Tupel.
- ▶ Für  $k = 1$  ist  $M^1 := M$ .

- (b) Das **kartesische Produkt** (bzw. **Kreuzprodukt**)  $M \times N$  zweier Mengen  $M, N$  ist die Menge

$$M \times N := \{ (m, n) : m \in M, n \in N \}.$$

- (c) Sei  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  und seien  $M_1, \dots, M_k$  Mengen. Das kartesische Produkt von  $M_1, \dots, M_k$  ist die Menge

$$M_1 \times \dots \times M_k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M_1, \dots, m_k \in M_k \}.$$

Sei  $M = \{a, b\}$  und  $N = \{1, 2, 3\}$ .

Dann gilt:

- $M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ .
- $M \times \{1\} = \{(a, 1), (b, 1)\}$ .
- $M \times \emptyset = \emptyset$ .
- $M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ .
- $M^1 = \{a, b\}$ .
- $\emptyset^0 = \{()\}$ , denn  $M^0 = \{()\}$  für jede Menge  $M$ .

- Zur Erinnerung: Die Karten eines Skat-Kartenspiels können wir darstellen durch:

Farben := {Kreuz, Pik, Herz, Karo},

Ränge := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass},

Karten := Farben  $\times$  Ränge.

- Wir führen die Mengen

Stunden := {0, 1, 2, ..., 23},

Minuten := {0, 1, 2, ..., 59},

Sekunden := {0, 1, 2, ..., 59}.

ein und können dann die Menge aller Uhrzeiten repräsentieren durch

Uhrzeiten := Stunden  $\times$  Minuten  $\times$  Sekunden,

Das Tupel (9, 45, 0) repräsentiert die Uhrzeit  
„9 Uhr, 45 Minuten und 0 Sekunden“.

# Python und kartesische Produkte

# Python: Tupel und kartesische Produkte

Tupel werden in Python durch den Datentyp `tuple` (Tupel) repräsentiert.

- 1 Ein Tupel wie etwa  $T = (1, 2, a)$  wird mit

$$T = (1, 2, 'a')$$

in Python eingeführt.

- 2 Die Python-Funktion `tuple()`: Für iterierbare Objekte  $I$  ist

$$T = \text{tuple}(I)$$

ein Objekt vom Datentyp *Tupel*. Das leere Tupel wird repräsentiert durch

$$T = \text{tuple()} \text{ „oder durch“ } T = ()$$

- 3 Wir benötigen das Python-Modul `itertools.product`: `import itertools`  
Für Mengen  $M_1, \dots, M_k$  ist

$$M = \text{set}(\text{itertools.product}(M_1, \dots, M_k))$$

das kartesische Produkt der Mengen  $M_1, \dots, M_k$ .



# Relationen: Teilmengen von kartesischen Produkten

## DEFINITION

(a) Sei  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  und seien  $M_1, \dots, M_k$  Mengen. Eine

**Relation  $R$  auf  $M_1, \dots, M_k$**

ist eine Teilmenge

$$R \subseteq M_1 \times \dots \times M_k.$$

- ▶ Statt  $(m_1, \dots, m_k) \in R$  schreiben wir auch  $R(m_1, \dots, m_k)$ , um anzudeuten, dass  $R$  eine Eigenschaft ist, die ein Tupel haben kann oder eben nicht.
- ▶ Die **Stelligkeit** einer solchen Relation ist  $k$ .

(b) Sei  $M$  eine Menge und sei  $k \in \mathbb{N}$ . Eine

**$k$ -stellige Relation über  $M$**

ist eine Teilmenge von  $M^k$ .

(a)  $\leq$  definiert eine 2-stellige Relation über  $\mathbb{R}$ : Wir schreiben

$$x \leq y \text{ statt } (x, y) \in \leq$$

(b) Teilbarkeit  $|$  ist eine 2-stellige Relation über  $\mathbb{N}$ .

(c) Inklusion  $\subseteq$  und Gleichheit  $=$  sind 2-stellige Relationen über Mengen.

(d) Relationen sind Grundlage der *relationalen Datenbanken*.

- ▶ Siehe Übungsblatt 2.

(e) Später:

- ▶ Jede 2-stellige Relation entspricht einem Graphen und jeder Graph entspricht einer 2-stelligen Relation.
- ▶ Funktionen sind Relationen mit bestimmten Eigenschaften.

- (e) Korrekte Datumsangaben: Um Datumsangaben im Format (Tag, Monat, Jahr) anzugeben, nutzen wir die Wertebereiche (oder Mengen)

$$\begin{aligned}\text{Tage} &:= \{1, 2, \dots, 31\} \\ \text{Monate} &:= \{1, 2, \dots, 12\} \\ \text{Jahre} &:= \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Die Menge “**Gültig**“ aller gültigen Datumsangaben ist eine **Teilmenge** von

$$\text{Tage} \times \text{Monate} \times \text{Jahre},$$

d.h. eine 3-stellige **Relation** auf Tage, Monate, Jahre,

- ▶ zu der beispielsweise das Tupel (23, 6, 1912) – der Geburtstag von Alan Turing, einem der einflussreichsten Pioniere der Informatik– gehört,
- ▶ nicht aber das Tupel (30, 2, 1912).

# Funktionen

# Was ist eine Funktion von $A$ nach $B$ ?

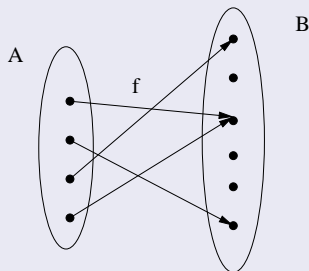
## DEFINITION

Seien  $A, B$  Mengen. Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) von  $A$  nach  $B$  ist eine 2-stellige Relation  $f$  auf  $A$  und  $B$ , es gilt also

$$f \subseteq A \times B$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes  $a \in A$  **genau ein**  $b \in B$  mit  $(a, b) \in f$  existiert.

*Anschaulich:*



# Funktionen: Schreibweisen

(a) Wir schreiben

$$f: A \rightarrow B,$$

um auszudrücken, dass  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$  ist.

(b) Ist  $f: A \rightarrow B$  und ist  $a \in A$ , so bezeichnet

$$f(a)$$

das (eindeutig bestimmte)  $b \in B$  mit  $(a, b) \in f$ .

Anstatt  $(a, b) \in f$  schreiben wir

$$f(a) = b \text{ bzw. } a \mapsto b.$$

(c) Die Menge aller Funktionen von  $A$  nach  $B$  bezeichnen wir mit

$$\text{Abb}(A, B).$$

$\text{Abb}(A, B)$  wird auch häufig mit  $A \rightarrow B$  oder mit  $B^A$  bezeichnet.

## DEFINITION

Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Funktion.

- (a) Der **Definitionsbereich** von  $f$  ist die Menge  $\text{Def}(f) := A$ .
- (b) Der **Bildbereich** (bzw. Wertebereich) von  $f$  ist die Menge  $B$ .
- (c) Für  $A' \subseteq A$  definiere das **Bild von  $A'$**  (unter  $f$ ) durch

$$f(A') := \{ f(a) : a \in A' \}.$$

- (d) Das **Bild** von  $f$ , genauer: das Bild von  $A$  unter  $f$ , ist die Menge

$$\text{Bild}(f) := f(A).$$

Beachte, dass stets  $\text{Bild}(f) = f(A) \subseteq B$  gilt.

- (e) Das **Urbild**  $f^{-1}(B')$  einer Teilmenge  $B' \subseteq B$  ist die Menge

$$f^{-1}(B') := \{ a \in A : f(a) \in B' \}.$$



## DEFINITION

Eine Funktion  $f$  mit

$$\text{Def}(f) \subseteq A \text{ und } \text{Bild}(f) \subseteq B$$

heißt eine

**partielle Funktion von  $A$  nach  $B$ .**

- Im Gegensatz zu partiellen Funktionen sagt man, dass eine Funktion  $f$  mit

$$A \subseteq \text{Def}(f) \text{ und } \text{Bild}(f) \subseteq B$$

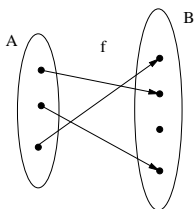
eine **totale Funktion** von  $A$  nach  $B$  ist.

- Sprechen wir von „Funktionen“, ohne sie explizit als „partiell“ zu bezeichnen, so meinen wir immer „totale“ Funktionen.

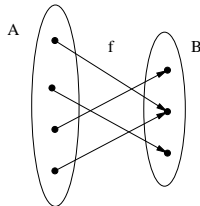
## DEFINITION

Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Funktion.

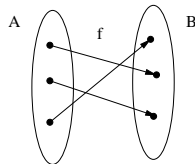
- (a)  $f$  heißt **injektiv**, falls es für jedes  $b \in B$  **höchstens** ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  gibt.
- (b)  $f$  heißt **surjektiv**, falls es für jedes  $b \in B$  **mindestens** ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  gibt.
- (c)  $f$  heißt **bijektiv**, falls es für jedes  $b \in B$  **genau ein**  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  gibt.



injektiv,  
nicht surjektiv,  
nicht bijektiv



nicht injektiv,  
surjektiv,  
nicht bijektiv



injektiv,  
surjektiv,  
bijektiv

(a) Für jede Funktion  $f: A \rightarrow B$  gilt:

$f$  ist bijektiv  $\iff f$  ist injektiv und surjektiv.

(b) Seien  $A$  und  $B$  **endliche** Mengen. Wenn  $f: A \rightarrow B$  eine injektive Funktion ist, dann hat  $B$  mindestens so viele Elemente wie  $A$ .

Später nennen wir zwei Mengen  $A$  und  $B$  **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Funktion

$$f: A \rightarrow B$$

gibt.

# Beispiele einiger Funktionen

- 1 Die Funktion „augenfarbe“ weist jedem Hörer der heutigen Veranstaltung ihre/seine Augenfarbe zu.
  - ▶ Der Definitionsbereich ist die Menge der Hörer der heutigen Veranstaltung.
  - ▶ Der Bildbereich ist die Menge { blau, braun, grau, grün } !?!

Die Funktion „augenfarbe“ ist **surjektiv**, aber nicht **injektiv** und damit natürlich auch nicht **bijektiv**.

- 2 Sei  $M$  eine Menge. Die „Identitätsfunktion“  $\text{id} : M \rightarrow M$  bildet jedes Element  $m \in M$  auf das Element  $m$  ab, es gilt also  $m \mapsto m$  (d.h.  $\text{id}(m) := m$ ).
  - ▶ Definitionsbereich, Bildbereich und Bild stimmen mit  $M$  überein.
  - ▶ „id“ ist **bijektiv**.

- 3 Die Funktion  $\text{quadrat} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird durch  $x \mapsto x^2$  (d.h.  $\text{quadrat}(x) := x^2$ ) definiert.
  - ▶ Definitionsbereich und Bildbereich stimmen mit  $\mathbb{R}$  überein.
  - ▶ Das Bild von „quadrat“ ist die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.„quadrat“ ist weder **surjektiv** noch **injektiv** und deshalb nicht **bijektiv**.

- 4 Eine **Hashfunktion**  $h : M \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$  bildet eine *große* Menge  $M$  von Daten auf eine *kleine* Hashtabelle ab:
  - ▶ Wenn  $M$  mehr als  $n$  Elemente hat, kann  $h$  **nicht injektiv** sein, aber hoffentlich ist  $h$  auf der Teilmenge  $M' \subseteq M$  tatsächlich auftretender Daten (fast) **injektiv**.

# Notation

# Wichtige Notation: Summen- und Produktzeichen

(a) Ist  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  und sind  $z_1, \dots, z_k$  Zahlen, so schreiben wir

$$\sum_{i=1}^k z_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} z_i,$$

um die Summe  $z_1 + \dots + z_k$  der Zahlen  $z_1, \dots, z_k$  zu bezeichnen.

(b) Wir schreiben

$$\prod_{i=1}^k z_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i \in \{1, \dots, k\}} z_i,$$

um das Produkt  $z_1 \cdot \dots \cdot z_k$  der Zahlen  $z_1, \dots, z_k$  zu bezeichnen.

(c) Sind  $M_1, \dots, M_k$  Mengen, so schreiben wir

$$\bigcup_{i=1}^k M_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i,$$

um die Vereinigung  $M_1 \cup \dots \cup M_k$  der Mengen  $M_1, \dots, M_k$  zu bezeichnen.

(d) Wir schreiben

$$\bigcap_{i=1}^k M_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i$$

um den Durchschnitt  $M_1 \cap \dots \cap M_k$  der Mengen  $M_1, \dots, M_k$  zu bezeichnen.

# Mächtigkeit und Kardinalität



## DEFINITION

Seien  $M$  und  $N$  Mengen.

- (a)  $M$  heißt **endlich**, wenn  $M$  nur endlich viele Elemente enthält, d.h. wenn es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Menge genau  $n$  Elemente enthält.  
Wir sagen, dass  $M$  die **Mächtigkeit**  $n$  (kurz:  $|M| := n$ ) besitzt.
- (b) Ist eine Menge  $M$  nicht endlich, bezeichnen wir sie als **unendlich**.
- (c)  $M$  und  $N$  heißen **gleichmächtig** :  $\iff$   
Es gibt eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$ .
  - ▶  $M$  heißt **abzählbar unendlich**, wenn  $M$  und  $\mathbb{N}$  gleichmächtig sind.  
(Eine bijektive Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$  „zählt die Elemente von  $M$  ab“.)
  - ▶  $M$  heißt **überabzählbar**, wenn  $M$  weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

In Python:

`len(M)`

gibt die Anzahl der Elemente einer Menge (bzw. die Anzahl der Komponenten eines Tupels)  $M$  aus.

# Mächtigkeit und Kardinalität: Beispiele

- $|\{2, 4, 6\}| = 3$ ,
- $|\emptyset| = 0$  und  $|\{\emptyset\}| = 1$ ,
- $|\{2, 4, 6, 4\}| = 3$ ,
- $|\{2, \{a, b\}\}| = 2$ ,
- $|\mathcal{P}(\{2, 4, 6\})| = 8$ .

# Die Größe wichtiger Mengen

(a) Seien  $A$  und  $B$  zwei endliche **disjunkte** Mengen, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ . Dann gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

(b) Seien  $M$  und  $N$  zwei endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|.$$

(c) Sei  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  und seien  $M_1, \dots, M_k$  endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \times \dots \times M_k| = \prod_{i=1}^k |M_i|.$$

(d) Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine endliche Menge. Dann gilt:

$$|M^k| = |M|^k.$$

Beweis: Siehe Tafel.

# Wie groß ist die Potenzmenge einer endlichen Menge?

(a) Für jede Menge  $M$  gibt es eine bijektive Funktion

$$f : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{Abb}(M, \{0, 1\}).$$

(b) Sei  $B$  eine Menge,  $A$  eine endliche Menge und sei  $k := |A|$ .  
Dann gibt es eine bijektive Funktion

$$f : \text{Abb}(A, B) \rightarrow B^k.$$

Beweis: siehe Tafel.

Seien  $A, B, M$  endliche Mengen. Dann gilt:

(a)  $|\text{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}$ .

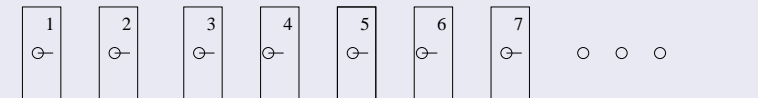
(b)  $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ .

Beweis: siehe Tafel.

# Hilbert's Hotel oder was bedeutet „unendlich“?

- ? Sind  $\mathbb{N}_{>0}$  und  $\mathbb{N}$  gleichgroß?
- ? Wie steht es mit  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Q}$ , bzw. mit  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$ ?

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die fortlaufend mit  $1, 2, 3, \dots$  nummeriert sind.



- Ein neuer Gast kommt. Obwohl alle Zimmer belegt sind, schafft es der Angestellte an der Rezeption, Platz zu schaffen. Wie?
  - ▶  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}_{>0}$  sind gleichmächtig.
- Kann man im vollbesetzten Hotel sogar unendlich viele neue Gäste, die mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  durchnummeriert sind, einquartieren?
  - ▶ Sind  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  gleichmächtig?
  - ▶ Sind  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Q}$  gleichmächtig?