Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 3

Ausgabe: 02.11.2017
Abgabe: 09.11.2017

Die Gesamtpunktzahl dieses Blattes beträgt 75 Punkte.

Zur Erinnerung:
Im Ingo-Wegener-Lernzentrum können Sie immer montags zwischen 14 und 16 Uhr sowie dienstags zwischen 10 bis 12 Uhr Fragen zum Dismod-Übungsblatt stellen.

Aufgabe 3.1 *Die drei Kisten* $(3 + (3 + 3) + 3 = 12$ Punkte$)$

Im Rahmen eines Gewinnspiels stehen vor Ihnen drei beschriftete Kisten, von denen Sie eine auswählen dürfen. In genau einer Kiste befindet sich Gold, in den beiden anderen befindet sich nur Stroh. Der Inhalt der gewählten Kiste ist Ihr Gewinn. Die Kisten haben die folgenden Beschriftungen:

K_1: „In Kiste 1 befindet sich Stroh.“

K_2: „In Kiste 2 befindet sich Gold.“

K_3: „In Kiste 2 befindet sich Stroh.“

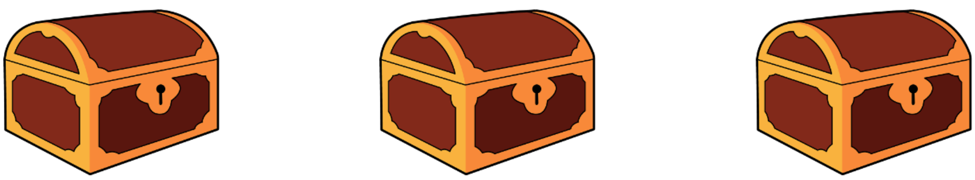
Verwenden Sie die aussagenlogischen Variablen $\mathbf{G_i}$ („die i-te Kiste enthält Gold“) für $i \in \{1, 2, 3\}$.

a) Geben Sie aussagenlogische Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 an, welche die drei Beschriftungen K_1, K_2 bzw. K_3 der Kisten formalisieren.

b) i) Es ist bekannt, dass genau eine der drei Beschriftungen K_1, K_2 bzw. K_3 korrekt ist. Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die diesen Umstand ausdrückt.

   ii) Geben Sie eine aussagenlogische Formel ψ an, die beschreibt, dass in genau einer der drei Kisten Gold ist.

c) Welche Beschriftungen sind korrekt, welche sind falsch? Welche Kiste wählen Sie aus, um garantiert Gold zu gewinnen?



Bitte wenden!

Aufgabe 3.2 *Erfüllbarkeit, Tautologien, Widersprüche* (8 + 12 = 20 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig[1],
- unerfüllbar[2] oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar[3]

ist. Geben Sie für jede Formel, die erfüllbar und falsifizierbar ist, sowohl eine erfüllende als auch eine falsifizierende Belegung an. Andernfalls ist keine Begründung nötig.

i) $\varphi_1 := \big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$ ii) $\varphi_2 := (C \to D) \land \neg(D \to C)$

iii) $\varphi_3 := \neg(P \lor Q) \land \neg\neg(Q \land P)$ iv) $\varphi_4 := \neg(X \to Z) \leftrightarrow (\neg Z \to \neg X)$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}) = \mathrm{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ ii) $\psi_2 := (B \land \neg A) \oplus (B \land A)$

iii) $\psi_3 := \bigwedge_{i=1}^{n} \big(\neg V_{i+1} \to \neg V_i\big)$ wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Aufgabe 3.3 *Partielle Evaluierungen und kurze erfüllende Belegungen* (15 Punkte)

Oft genügen zur Evaluierung bzw. zum Überprüfen der Erfüllbarkeit einer Formel bereits einige wenige belegte Variablen. Aus diesem Grund definieren wir *partielle Evaluierungen* von Belegungen:

Definition. Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Belegungen mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathrm{Def}(\mathcal{B}_2)$ und $\mathcal{B}_1(V) = \mathcal{B}_2(V)$ f.a. $V \in \mathrm{Def}(\mathcal{B}_1)$. Dann heißt $\mathcal{B}_2$ *Erweiterung* von $\mathcal{B}_1$.

Für eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ definieren wir den *partiellen Wahrheitswert* $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$ als

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}'} = 1 \text{ für alle zu } \varphi \text{ passenden Erweiterungen } \mathcal{B}' \text{ von } \mathcal{B}, \\ 0 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}'} = 0 \text{ für alle zu } \varphi \text{ passenden Erweiterungen } \mathcal{B}' \text{ von } \mathcal{B}, \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei steht der Stern $*$ intuitiv für „noch nicht entschieden“. Beachten Sie, dass wir hier – anders als in Def 3.11 – nicht verlangen, dass die Belegung $\mathcal{B}$ passend zu φ ist. Wie gewohnt nennen wir eine Belegung $\mathcal{B}$ mit $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ *erfüllend* und eine Belegung mit $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 0$ *falsifizierend.*

Beispiel: Betrachte die Belegung $\mathcal{B} : \{V_1\} \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}(V_1) = 1$. Dann ist

$$[\![(V_1 \lor V_2)]\!]^{\mathcal{B}} = 1,\ [\![(\neg V_1 \land V_3)]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \text{ und } [\![(V_1 \oplus V_4)]\!]^{\mathcal{B}} = *$$

Bestimmen Sie für die folgenden Formeln ψ_i jeweils erfüllende Belegungen $\mathcal{B}$ mit möglichst kleinem Definitionsbereich (d. h. möglichst wenigen belegten Variablen).

a) $\psi_1 := (A \lor B \lor C \lor \neg D) \land B$

b) $\psi_2 := \big((K \to L) \to M\big) \to N$

c) $\psi_3 := \neg(E \leftrightarrow F \leftrightarrow G) \lor \neg H \lor (E \oplus F \oplus G)$

d) $\psi_4 := P \oplus Q \oplus R \oplus S$

e) $\psi_5 := (X \land \neg Z) \to \big((Y \lor Z) \oplus \neg(\neg W \leftrightarrow Y)\big)$

Bitte wenden!

[1] Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie unter allen Belegungen erfüllt wird, vgl. Definition 3.23. a).
[2] Eine Formel ist unerfüllbar, wenn sie unter allen Belegungen falsifiziert wird, vgl. Definition 3.23. b).
[3] Vgl. Definition 3.23. c) und d) sowie Beobachtung 3.26.

Aufgabe 3.4 *Modellierung mit Aussagenlogik: Deep Space*  (9+9+1+9 = 28 Punkte)

Im Koprolu-Sektor des Shylmagoghnar-Systems liegt P3X-888, Heimatplanet der Gelgameks. Um ihre Unobtanium-Exportwirtschaft ausdehnen zu können, beantragt die planetare Regierung der Gelgameks eine Aufnahme in die Merkantile Allianz für Fortschritt und Entwicklung im All (MAFEA). Nachdem die Inspekteure der MAFEA den Planeten P3X-888 ausgiebig unter die Lupe genommen haben, wird ein Katalog von Auflagen formuliert:

A. Der Sklavenaufstand in den Naquadah-Minen von Vendor muss niedergeschlagen werden oder die usurpatorischen Umtriebe des Raumpatrouillen-Offiziers Gorn müssen beendet werden.

B. Mit den Namdalorianern muss ein Waffenstillstand ausgehandelt werden oder die Quintronen-Technologie muss erforscht werden.

C. Nur wenn die usurpatorischen Umtriebe Gorns beendet sind, darf die Quintronen-Technologie erforscht werden.

Die Gelgameks müssen *mindestens zwei* der drei Auflagen erfüllen, um in die MAFEA aufgenommen zu werden.

Verwenden Sie im Folgenden die aussagenlogischen Variablen

N für „die Namdalorianer willigen in einen Waffenstillstand ein",
U für „die usurpatorischen Umtriebe Gorns werden beendet",
S für „der Sklavenaufstand in den Naquadah-Minen von Vendor wird niedergeschlagen" ,
Q für „die Quintronen-Technologie wird erforscht".

a) Stellen Sie Formeln $\varphi_{\mathrm{A}}, \varphi_{\mathrm{B}}, \varphi_{\mathrm{C}}$ auf, welche die drei Auflagen A, B, C widerspiegeln. Stellen Sie dann eine Formel φ_{MAFEA} auf, die ausdrückt, dass die Gelgameks in die MAFEA aufgenommen werden.

Um in Erfahrung zu bringen, wie die Auflagen am besten zu erfüllen sind, beruft die Gelgamekanische Regierung die fünf W'illders der Glondog von Gaggen-Thor in den Forschungsrat. Nach Analyse aller vorliegenden Daten kommt der Rat zu folgendem Ergebnis:

I. Der Sklavenaufstand kann genau dann niedergeschlagen werden, wenn entweder die Namdalorianer einem Waffenstillstand zustimmen oder die usurpatorischen Umtriebe Gorns beendet werden.

II. Wenn der Sklavenaufstand nicht niedergeschlagen wird, kann die Quintronen-Technologie nicht erforscht werden[4].

III. Entweder beendet Gorn seine ursupatorischen Umtriebe oder die Quintronen-Technologie wird erforscht.

IV. Die Namdalorianer werden einem Waffenstillstand niemals zustimmen.

b) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\psi_{\mathrm{I}}, \ldots, \psi_{\mathrm{IV}}$ auf, welche die vom Forschungsrat ermittelten Fakten widerspiegeln.

c) Was drückt die Formel $\chi := \varphi_{\mathrm{MAFEA}} \wedge \psi_{\mathrm{I}} \wedge \psi_{\mathrm{II}} \wedge \psi_{\mathrm{III}} \wedge \psi_{\mathrm{IV}}$ aus? Eine umgangssprachliche Erklärung genügt.

d) Bestimmen Sie alle erfüllenden Belegungen von χ, falls solche existieren. Können die Gelgameks der MAFEA beitreten? Falls ja, wie können sie dies bewerkstelligen? Falls nein, begründen Sie!

Sie können beispielsweise eine Wahrheitstafel zur Begründung verwenden.

[4]Denn Quintronen bestehen zu mindestens 40% aus Naquadah!