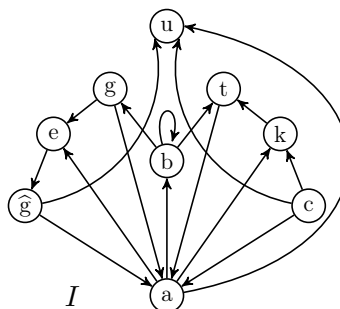
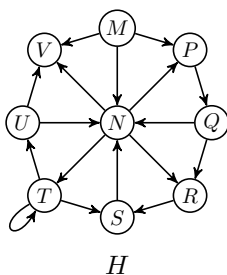
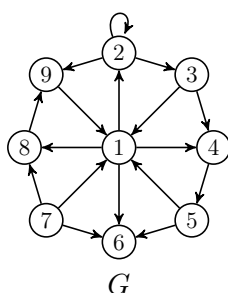


## Übungsblatt 8

Ausgabe: 07.12.17  
 Abgabe: 14.12.17

### Aufgabe 8.1 *Isomorphie, Planarität, Bipartitheit* ((8 + 8) + 2 + 10 = 28 Punkte)

Die Graphen  $G$ ,  $H$  und  $I$  seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



- a)
  - i) Zeigen Sie:  $G$  und  $H$  sind nicht isomorph.
  - ii) Geben Sie einen Isomorphismus von  $G$  nach  $I$  an.
- b) Ist  $I$  planar?
- c) Zeigen Sie: Für jedes  $d \in \mathbb{N}_{>0}$  ist der  $d$ -dimensionale Würfel  $W_d = (V_d, E_d)$  bipartit.

Zur Erinnerung:  $V_d = \{0, 1\}^d$  und  
 $E_d = \{\{u, v\} : u, v \in V_d, u \text{ und } v \text{ unterscheiden sich in genau einem Bit}\}$

### Aufgabe 8.2 *Entscheidungsbaume* (10 + 2 + 8 = 20 Punkte)

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  seien  $2^n$  Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit  $M_1, \dots, M_{2^n}$  bezeichnen. Genau eine der Münzen ist schwerer als alle anderen. Diese Münze lässt sich mithilfe einer Balkenwaage mit dem folgenden Verfahren finden:

1. Falls  $n = 0$ , ist die einzige vorhandene Münze die gesuchte.
  2. Ansonsten vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge  $A := \{M_1, \dots, M_{2^{n-1}}\}$  mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge  $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \dots, M_{2^n}\}$ .  
 Ist das Gesamtgewicht von  $A$  größer als das von  $B$ , muss sich die gesuchte Münze in  $A$  befinden und das Verfahren wird rekursiv auf die Menge  $A$  angewendet, andernfalls wird es rekursiv auf die Menge  $B$  angewendet.
- a) Beschreiben Sie das Verfahren für  $n = 2$  durch einen Entscheidungsbaum. Wählen Sie hierfür geeignete Knotenbeschriftungen, wobei die Abfolge der Wiegevorgänge eindeutig aus den Beschriftungen abzulesen sein soll.
  - b) Welchen Situationen im Entscheidungsprozess entsprechen die inneren Knoten bzw. die Wurzel des Baumes? Welcher Situation entspricht ein Blatt?
  - c) Wie viele Wiegevorgänge werden im obigen Verfahren für  $2^n$  Münzen im besten Fall, also mindestens, durchgeführt? Wie viele Wiegevorgänge werden im schlimmsten Fall, also höchstens, durchgeführt?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8.3** *Syntaxbäume und Rekursionsbäume*

(8 + 7 + (6 + 6) = 27 Punkte)

- a) Geben Sie für die Formel  $\varphi := \left( \neg(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((C \vee B) \oplus \neg\neg D) \right)$  einen Syntaxbaum an.
- b) Betrachte die Funktion `fibonacci_naiv`, die auf naive Art die  $n$ -te Fibonacci-Zahl  $\text{fib}(n)$  (siehe Beispiel 4.19 im Skript) rekursiv berechnet:

```
def fibonacci_naiv(n):
    if n <= 2:
        return 1
    else:
        return fibonacci_naiv(n-2) + fibonacci_naiv(n-1)
```

Geben Sie den Rekursionsbaum `Baum(6)` für den Aufruf `fibonacci_naiv(6)` in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf `fibonacci_naiv(p)` entspricht, mit dem Parameter  $p$ . Ist `Baum(6)` ein Binärbaum? Ist er ein voller Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

- c) Betrachte die Funktion `prod` für die Russische Bauernmultiplikation (vgl. Aufgabe 6.3):

```
def prod(x,k):
    if k == 0:
        return 0
    elif k % 2 == 0:
        return prod(2*x, k/2)
    else:
        return prod(2*x, k//2) + x
```

# k ist gerade und groesser 0

# k ist ungerade

# k//2 entspricht der

# ganzzahligen Division (k-1)/2

- i) Geben Sie den Rekursionsbaum `Baum(12,21)` für den Aufruf `prod(12,21)` in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf `prod(x,k)` entspricht, mit dem Tupel  $(x, k)$ .
- ii) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Tiefe des Rekursionsbaums `Baum(x, 2n)`.

**Aufgabe 8.4** *Vollständige  $k$ -äre Bäume*

(25 Punkte)

Sei  $k \geq 2$ . Ein gewurzelter Baum  $B=(V, E)$  ist ein *vollständiger  $k$ -ärer Baum*, falls gilt:

- für jeden Knoten  $v \in V$  gilt  $\text{Aus-Grad}_B(v) = k$  oder  $v$  ist ein Blatt
- und alle Blätter von  $B$  haben dieselbe Tiefe.

Zeigen Sie: Ein vollständiger  $k$ -ärer Baum der Tiefe  $t$  besitzt genau  $\frac{k^{t+1}-1}{k-1}$  Knoten.

*Hinweis:* Benutzen Sie eine vollständige Induktion nach  $t$ .

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8.5\*** Bonusaufgabe

(4 + 8 + 8 = 20\* Extrapunkte)

Betrachten Sie die Operationen **Löschen** bzw. **Kontraktion** auf einem endlichen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$ .

1. Beim **Löschen** darf eine Kante aus  $E$  entfernt werden oder ein Knoten aus  $V$  (mitsamt aller inzidenter Kanten) entfernt werden.
2. Sei  $\{u, v\} \in E$  und  $w \notin V$ . Eine **Kontraktion** der Kante  $\{u, v\}$  erzeugt aus  $G$  einen neuen Graphen  $G' = (V', E')$  mit

$$V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$$

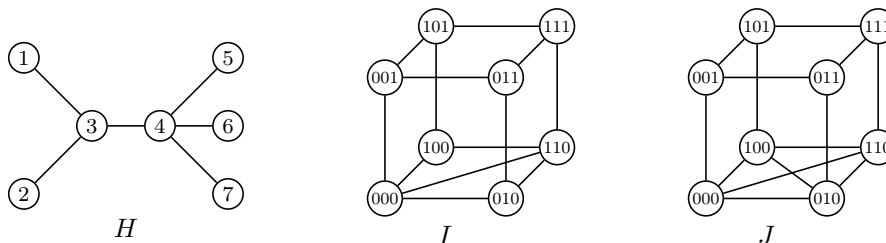
$$E' = \left( E \setminus \{e \in E : u \in e \text{ oder } v \in e\} \right) \cup \left\{ \{w, x\} : x \notin \{u, v\} \text{ und } (\{u, x\} \in E \text{ oder } \{v, x\} \in E) \right\}$$

Anschaulich: Eine Kontraktion verschmilzt eine Kante  $\{u, v\}$  mitsamt ihrer beiden Endknoten zu einem neuen Knoten  $w$ . Alle Knoten (ausgenommen  $u$  und  $v$ ), die in  $G$  mit  $u$  bzw.  $v$  benachbart waren, sind in  $G'$  mit  $w$  benachbart.

Mithilfe dieser beiden Operationen können wir zeigen, dass ein Graph nicht planar ist.

**Satz von Wagner.** Ein ungerichteter Graph  $G$  ist genau dann nicht planar, wenn es eine Folge von Kontraktionen, Knoten- bzw. Kantenlöschungen gibt, sodass aus  $G$  ein Graph erzeugt werden kann, der zu  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  isomorph ist.  $\diamond$

Seien nun die Graphen  $H$ ,  $I$  und  $J$  wie folgt in grafischer Darstellung gegeben:



- a) Führen Sie eine Kontraktion der Kante  $\{3, 4\}$  im Graphen  $H$  durch. Eine Begründung ist nicht erforderlich.
- b) Zeigen oder widerlegen Sie:  $I$  ist planar.
- c) Zeigen oder widerlegen Sie:  $J$  ist planar.