Logik erster Stufe (Prädikatenlogik)

Prädikatenlogik: Quantoren und Prädikate

Mit Hilfe der Aussagenlogik haben wir Wissen modelliert und Schlüsse aus diesem Wissen gezogen.

Auch mit der Logik erster Stufe möchten wir Wissen modellieren und „verstehen".

+ Im Gegensatz zur Aussagenlogik stehen wesentlich umfangreichere Ausdrucksmöglichkeiten zur Verfügung. Zum Beispiel möchten wir sagen, dass
  - „die Zahl x die Zahl z teilt."

    *x teilt z genau dann, wenn es eine Zahl y **gibt** mit $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z}$.*

    Der **Existenz-Quantor** „wenn es eine Zahl y gibt" wird benutzt wie auch das **Prädikat** (oder die Relation) „$x \cdot y = z$".
  - „ein Land in Europa in 2014 Fußball-Weltmeister wurde."

    *Es **gibt** ein **Land in Europa**, das **in 2014 Fußball-Weltmeister** wurde*

    Auch hier wird der Existenz-Quantor benötigt wie auch die Prädikate „Land in Europa" und „Fußball-Weltmeister in 2014".

\- Allerdings erkaufen wir uns die größere Ausdruckskraft in vielen Fällen mit einer algorithmisch deutlich schwierigeren Handhabung.

Prädikatenlogik: Ein erster Überblick

Genau wie die Aussagenlogik besitzt die Prädikatenlogik:

(a) eine **Syntax**, die festlegt, welche Zeichenketten Formeln der Prädikatenlogik sind und

(b) eine **Semantik**, die festlegt, welche „**Bedeutung**“ einzelne Formeln haben.

Während sich die Aussagenlogik lediglich mit „wahren“ und „falschen“ Aussagen und deren Kombination beschäftigt, „redet“ die Prädikatenlogik über

- unterschiedlichste **Strukturen** wie zum Beispiel
  - die natürlichen Zahlen (mit Addition und Multiplikation) oder über
  - Länder (mit den Prädikaten „in Europa“ und „Fußball-Weltmeister in 2014“).
- und erlaubt die Formulierung komplexer Aussagen über deren Eigenschaften.

Über welche Strukturen sollen die Formeln der Prädikatenlogik „reden“?

Strukturen

An welche Strukturen ist denn gedacht?

Zum Beispiel an

- Graphen $G = (V, E)$,
- Bäume $B = (V, E)$,
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation, $(\mathbb{N}, +, \times)$,
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und den Konstanten 0 und 1, $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ oder
- Datenbanken.

Signaturen legen den „Typ“ (bzw. das „Format“) der jeweiligen Struktur fest: Welche Relationen, Funktionen oder Konstanten besitzt die Struktur?

Signaturen

Eine **Signatur** (bzw. eine Symbolmenge; engl: signature) ist eine Menge σ von

Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen.

Jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. Arität, engl. arity)

$$\mathrm{ar}(\dot{R}) \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{ar}(\dot{f}) \in \mathbb{N}_{>0}.$$

- Der griechische Buchstabe σ (in Worten: sigma) bezeichnet eine `Signatur`. Symbole aus σ werden mit einem Punkt, wie in $\dot{R}$ bzw. $\dot{f}$ gekennzeichnet.
- Für `Relationssymbole` verwenden wir meist Großbuchstaben wie $\dot{R}, \dot{P}, \dot{E}, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \ldots$, für `Funktionssymbole` Kleinbuchstaben wie $\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}, \ldots$ und für `Konstantensymbole` Kleinbuchstaben wie $\dot{c}, \dot{d}, \ldots$.
- Gelegentlich verwenden wir auch

$$\begin{array}{cl} \dot{\leqslant} & \text{(2-stelliges Relationssymbol),} \\ \dot{+}, \dot{\times} & \text{(2-stellige Funktionssymbole),} \\ \dot{0}, \dot{1} & \text{(Konstantensymbole).} \end{array}$$

Strukturen

Eine **Struktur** über der Signatur σ (kurz: σ-Struktur) ist ein Paar

$$\mathfrak{A} \ = \ (A, \alpha),$$

- mit einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten Universum (bzw. Träger, engl.: universe, domain) von $\mathfrak{A}$, und
- einer auf σ definierten Abbildung α, die
  - jedem Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$ eine Relation $\alpha(\dot{R}) \subseteq A^{\text{ar}(\dot{R})}$ der Stelligkeit $\text{ar}(\dot{R})$ zuordnet,
  - jedem Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ eine Funktion $\alpha(\dot{f}) \colon A^{\text{ar}(\dot{f})} \to A$ zuordnet und
  - jedem Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ ein Element $\alpha(\dot{c}) \in A$ zuordnet.

Die Funktion α **interpretiert** die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole der Signatur σ:

> α *weist jedem Relations-, Funktions- oder Konstantensymbol eine tatsächliche Relation, Funktion oder Konstante über dem Universum A zu.*

Strukturen: Notation

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit Fraktur-Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also $A, B, G, \ldots$.
- Ist $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine σ-Struktur, so schreiben wir für jedes Symbol $\dot{S} \in \sigma$ oft
$$\dot{S}^{\mathfrak{A}} \quad \text{an Stelle von} \quad \alpha(\dot{S}).$$
- Falls $\sigma = \{\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_k, \dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_l, \dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_m\}$ ist, schreiben wir auch
$$\mathfrak{A} \; = \; (A, \dot{R}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{R}_k^{\mathfrak{A}}, \dot{f}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{f}_l^{\mathfrak{A}}, \dot{c}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{c}_m^{\mathfrak{A}}).$$

Arithmetische Strukturen

Wir definieren die Signatur

$$\sigma_{\mathsf{Ar}} := \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}\},$$

wobei $\dot{+}$, $\dot{\times}$ 2-stellige Funktionssymbole und $\dot{0}, \dot{1}$ Konstantensymbole sind.

Wir betrachten die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathcal{N}}, \dot{\times}^{\mathcal{N}}, \dot{0}^{\mathcal{N}}, \dot{1}^{\mathcal{N}}),$$

- wobei $\dot{+}^{\mathcal{N}}$ und $\dot{\times}^{\mathcal{N}}$ die natürliche Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind
- und $\dot{0}^{\mathcal{N}} := 0$, $\dot{1}^{\mathcal{N}} := 1$ gilt.

Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ definieren.

Graphen und Bäume als Strukturen

Wir definieren die Signatur

$$\sigma_{\text{Graph}} := \{\dot{E}\},$$

wobei $\dot{E}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$$

mit Universum $A := V$ und Relation $\dot{E}^{\mathfrak{A}} := E$ auffassen.

Entsprechend können wir σ_{Graph}-Strukturen auch für ungerichtete Graphen und ungerichtete Bäume definieren.

Eine Kino-Datenbank

Unsere kleine Datenbank besteht aus:

- einer Tabelle **Orte**, die Informationen über Kinos (Kino, Adresse, Telefonnummer) enthält,
- einer Tabelle **Filme** mit Informationen über die Filme (Titel, Regie, Schauspieler) und
- eine Tabelle **Programm** mit Informationen zum aktuellen Kinoprogramm (Kino, Titel, Zeit).

Die Tabelle „Orte“

Kino	Adresse	Telefon
Babylon	Dresdner Str. 2	61609693
Casablanca	Friedenstr. 12	6775752
Cinestar Cubix Alexanderplatz	Rathausstr. 1	2576110
Die Kurbel	Giesebrechtstr. 4	88915998
Filmpalast Berlin	Kurfürstendamm 225	8838551
International	Karl-Marx-Allee 33	24756011
Kino in der Kulturbrauerei	Schönhauser Allee 36	44354422
Moviemento	Kottbusser Damm 22	6924785

Die Tabelle „Filme“

Titel	Regie	Schauspieler
Capote	Bennet Miller	Philip Seymour Hoffman
Capote	Bennet Miller	Catherine Keener
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Martina Gedeck
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Ulrich Tukur
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Ralph Fiennes
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Rachel Weisz
Good Night and Good Luck	George Clooney	David Strathairn
Good Night and Good Luck	George Clooney	Patricia Clarkson
Knallhart	Detlev Buck	Jenny Elvers
Knallhart	Detlev Buck	Jan Henrik Stahlberg
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Wolfgang Völz
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Wolfgang Völz
Requiem	Hans-Christian Schmid	Sandra Hüller
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Nadja Uhl
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Inka Friedrich
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Andreas Schmidt
Syriana	Stephen Gaghan	George Clooney
Syriana	Stephen Gaghan	Matt Damon
V wie Vendetta	James McTeigue	Natalie Portman
Walk the Line	James Mangold	Joaquin Phoenix
Walk the Line	James Mangold	Reese Witherspoon

Die Tabelle „Programme“

Kino	Titel	Zeit
Babylon	Capote	17:00
Babylon	Capote	19:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	17:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	20:15
International	Das Leben der Anderen	14:30
International	Das Leben der Anderen	17:30
International	Das Leben der Anderen	20:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	15:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	17:45
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	20:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	18:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	20:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	22:45
Babylon	Sommer vorm Balkon	21:45
Kino in der Kulturbrauerei	Sommer vorm Balkon	21:45
Filmmuseum Potsdam	Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	22:00

Die Kino-Signatur σ_{Kino}

Die Signatur σ_{Kino} besteht aus:

- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Orte}}$,
- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Filme}}$,
- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Programm}}$
- und Konstantensymbolen $\dot{c}$ für jedes Wort c über dem ASCII-Alphabet. Damit werden alle potentiellen Einträge c der Datenbank ermöglicht wie etwa

  $\dot{\mathit{Babylon}}$, $\dot{\mathit{Casablanca}}$, ..., $\dot{\mathit{Capote}}$, $\dot{\mathit{Das\ Leben\ der\ Anderen}}$, ... usw., aber auch z.B. $\dot{\mathit{Stephen\ Spielberg}}$ oder $\dot{\mathit{Lola\ rennt}}$.

Die Kino-Struktur $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$

Die σ_{Kino}-Struktur $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ hat als Universum die Menge

$$A_{\text{Kino}} := \text{ASCII}^*$$

aller Worte über dem ASCII-Alphabet sowie die 3-stelligen Relationen

$$\begin{aligned}
\dot{Orte}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Babylon}, \text{Dresdner Str. } 2, 61609693), \\
& (\text{Casablanca}, \text{Friedenstr. } 12, 6775752), \ldots, \\
& (\text{Moviemento}, \text{Kottbusser Damm } 22, 6924785)\}, \\
\dot{Filme}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Philip Seymour Hoffman}), \\
& (\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Catherine Keener}), \ldots, \\
& (\text{Walk the Line}, \text{James Mangold}, \text{Reese Witherspoon})\}, \\
\dot{Programm}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Babylon}, \text{Capote}, 17{:}00), \\
& (\text{Babylon}, \text{Capote}, 19{:}30), \\
& (\text{Kino in der Kulturbrauerei}, \text{Capote}, 17{:}30), \ldots\}
\end{aligned}$$

Die Syntax der Prädikatenlogik

Die Formeln der Prädikatenlogik

Sei σ eine Signatur.

Die Formeln der Prädikatenlogik sollen über σ-Strukturen „reden".

Aber wie sollten wir die Formeln denn definieren?

- Wir „erfinden" **Variablen** v_i mit der Absicht, dass v_i ein Element des Universums ist.
- Aus den Variablen, den Funktions- und Konstantensymbolen bauen wir **Terme** durch „Ineinandersetzung".
- Relationssymbole aus σ (in die Terme eingesetzt werden dürfen) und „gleichgesetzte" Terme werden mit den logischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ verknüpft.
- Wir dürfen **All-** und **Existenz-Quantoren** einsetzen, um die Variablen der Formel zu binden.

Machen wir uns also an die Definition der Syntax.

Die Formeln der Prädikatenlogik

σ-Terme

Sei σ eine Signatur.

(a) Eine **Variable** hat die Form v_i für $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit $\textsc{Var}$, d.h. $\textsc{Var} = \{ v_i \mid i \in \mathbb{N} \}$.

(b) Das Alphabet $A_{\sigma\text{-Terme}}$ besteht aus allen Elementen in $\textsc{Var}$, allen Konstanten- und Funktionssymbolen in σ, den Klammern (,) und dem Komma ,.

(c) Die Menge $T_\sigma \subseteq A^*_{\sigma\text{-Terme}}$ der **σ-Terme** wird rekursiv rekursiv definiert.

Basisregeln:

- Für jedes Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ ist $\dot{c} \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \textsc{Var}$ ist $x \in T_\sigma$.

Rekursive Regeln:

- Für jedes Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ und für $r := \mathrm{ar}(\dot{f})$ gilt:
  Sind $t_1 \in T_\sigma, \ldots, t_r \in T_\sigma$, so ist auch $\dot{f}(t_1, \ldots, t_r) \in T_\sigma$.

σ-Terme: Beispiele

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{c}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$ besteht.

Folgende Worte sind σ-Terme:

$$\dot{c}, \quad v_4, \quad \dot{f}(\dot{c}, \dot{c}), \quad \dot{f}(\dot{c}, v_0), \quad \dot{f}\big(\dot{c}, \dot{f}(\dot{c}, v_0)\big).$$

Die nächsten Worte sind keine σ-Terme:

$$\mathbf{0}, \quad \dot{f}(\mathbf{0}, \dot{c}), \quad \dot{f}(v_0, \dot{c}, v_1), \quad f^{\mathfrak{A}}(2, 3).$$

Das Formelalphabet A_σ

Sei σ eine Signatur.

Das **Alphabet** A_σ der **Prädikatenlogik** (über σ) besteht aus:

- allen Symbolen in $A_{\sigma\text{-Terme}}$
- allen Relationssymbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol $\doteq$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

D.h.

$$A_\sigma \;=\; A_{\sigma\text{-Terme}} \cup \sigma \;\cup\; \{\exists, \forall\} \;\cup\; \{\doteq\} \;\cup\; \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\} \;\cup\; \{,\}.$$

Die Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Sei σ eine Signatur.

Die Menge

$\mathrm{FO}[\sigma]$ (FO –first-order logic– ist englisch für Logik erster Stufe)

aller Formeln der Prädikatenlogik über σ wird rekursiv wie folgt definiert:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:
$$t_1 \doteq t_2 \in \mathrm{FO}[\sigma].$$
- Für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(\dot{R})$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_r$ in T_σ gilt:
$$\dot{R}(t_1, \ldots, t_r) \in \mathrm{FO}[\sigma].$$

Die $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln $t_1 \doteq t_2$ oder $\dot{R}(t_1, \ldots, t_r)$ heißen **atomare σ-Formeln**.

Rekursive Regeln:

- Ist $\phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch $\neg\phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\phi \wedge \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$
  - $(\phi \vee \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$
  - $(\phi \rightarrow \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$
  - $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \textsc{Var}$, so ist auch
  - $\exists x\, \phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$
  - $\forall x\, \phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Um die Lesbarkeit von Formeln zu verbessern:

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, \ldots$ oder mit Varianten wie $x', y_1, y_2, \ldots$.
- Für gewisse 2-stellige Relationssymbole wie z.B. $\dot{\leqslant} \in \sigma_{\text{Ord}}$ verwenden wir die Infix- statt Präfixschreibweise und setzen Klammern auf natürliche Weise:

  Beispiel:
  An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\dot{\leqslant}(x, y)$ schreiben wir $x \dot{\leqslant} y$.

Wir üben, bevor wir die Semantik der Prädikatenlogik formal einführen.

Formeln, die über gerichtete Graphen reden

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{\dot{E}\}$ mit dem zweistelligen Relationssymbol $\dot{E}$.

(a) Die FO[σ_{Graph}]-Formel

$$\phi \quad := \quad \forall x \forall y \big(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x)\big)$$

besagt: „Für alle Knoten x, y gilt: Falls es eine Kante von x nach y gibt, so gibt es auch eine Kante von y nach x.“ Ein Graph $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ „sollte“ ϕ genau dann erfüllen, wenn dessen Kantenrelation symmetrisch ist.

(b) Die Formel

$$\phi(x,y) \quad := \quad \exists z_1 \exists z_2 \Big(\big(\dot{E}(x,z_1) \land \dot{E}(z_1,z_2)\big) \land \dot{E}(z_2,y) \Big).$$

drückt aus, dass es einen Weg der Länge 3 von Knoten x zu Knoten y gibt.

(c) Was besagt die folgende FO[σ_{Graph}]-Formel?

$$\forall x \forall y \exists z_1 \exists z_2 \Big(\big(\dot{E}(x,z_1) \land \dot{E}(z_1,z_2)\big) \land \dot{E}(z_2,y) \Big)$$

Es gibt zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge 3.

Formeln, die über die natürlichen Zahlen reden

Sei $\sigma_{\text{Ar}} := \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}\}$ die arithmetische Signatur.

(a) Die FO[σ_{Ar}]-Formel

$$\phi := \forall x \forall y \; x \dot{+} y \doteq y \dot{+} x$$

besagt, dass die Addition kommutativ ist.

(b) Die Formel

$$\psi := \forall x \forall y \forall z \; (x \dot{\times} y) \dot{\times} z \doteq x \dot{\times} (y \dot{\times} z)$$

besagt, dass die Multiplikation assoziativ ist.

(c) Um die Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathcal{N}}, \dot{\times}^{\mathcal{N}}, \dot{0}^{\mathcal{N}}, \dot{1}^{\mathcal{N}})$ der natürlichen Zahlen zu beschreiben, wird in den Peano-Axiomen die vollständige Induktion für jede FO[σ_{Ar}]-Formel $\alpha(x)$ mit einer FO[σ_{Ar}]-Formel β_α gefordert:

$$\beta_\alpha := \big(\alpha(0) \wedge \forall x \, \big(\alpha(x) \to \alpha(x \dot{+} 1)\big)\big) \to \forall x \, \alpha(x).$$

Formeln, die über Verwandschaftsbeziehungen reden (1/2)

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, erfinden wir die Signatur σ mit den folgenden Symbolen:

- 1-stellige Funktionssymbole $\dot{Vater}$, $\dot{Mutter}$
  (**Gewünschte** Bedeutung: $x \doteq \dot{Mutter}(y)$ besagt „x ist die Muttter von y".)
- 2-stellige Relationssymbole $\dot{Geschwister}$, $\dot{Vorfahr}$
  (**Gewünschte** Bedeutung: $\dot{Geschwister}(x, y)$ besagt, dass x und y Geschwister sind; $\dot{Vorfahr}(x, y)$ besagt, dass x ein Vorfahr von y ist.)

Wissen über Verwandtschaftsbeziehungen lässt sich durch Formeln der Prädikatenlogik repräsentieren, beispielsweise:

(a) „Personen mit gleichem Vater und gleicher Mutter sind Geschwister":

$$\forall x \forall y \Big(\big(\dot{Vater}(x) \doteq \dot{Vater}(y) \wedge \dot{Mutter}(x) \doteq \dot{Mutter}(y) \big) \rightarrow \dot{Geschwister}(x, y) \Big).$$

(b) „Die Relation $\dot{Vorfahr}$ ist transitiv":

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\dot{Vorfahr}(x, y) \wedge \dot{Vorfahr}(y, z) \big) \rightarrow \dot{Vorfahr}(x, z) \Big).$$

Formeln, die über Verwandschaftsbeziehungen reden (2/2)

(c) „Eltern sind die einzigen unmittelbaren Vorfahren“:

$$\forall x \forall y \Big(\big(x \doteq \dot{Vater}(y) \lor x \doteq \dot{Mutter}(y) \big) \leftrightarrow \Big(\dot{Vorfahr}(x,y) \land \neg \exists z \big(\dot{Vorfahr}(x,z) \land \dot{Vorfahr}(z,y) \big) \Big) \Big).$$

(d) Die folgende Formel $\phi(x,y)$ besagt, dass x Tante oder Onkel von y ist:

$$\phi(x,y) \ := \ \exists z \Big(\dot{Geschwister}(x,z) \land \big(z \doteq \dot{Vater}(y) \lor z \doteq \dot{Mutter}(y) \big) \Big).$$

(e) Die folgende Formel $\psi(x)$ besagt, dass x Vater von genau 2 Kindern ist:

$$\psi(x) \ := \ \exists y_1 \exists y_2 \Big(\Big(\big(x \doteq \dot{Vater}(y_1) \land x \doteq \dot{Vater}(y_2) \big) \land \neg y_1 \doteq y_2 \Big) \land \forall z \big(x \doteq \dot{Vater}(z) \to (z \doteq y_1 \lor z \doteq y_2) \big) \Big).$$

Die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre

ZF: Extensionalität und die Nullmenge

Die Formeln der Mengenlehre benutzen die Signatur

$$\sigma := \{\dot{\in}\}$$

mit dem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{\in}$. Die **Zermelo-Fraenkel Mengenlehre** besteht aus der Menge `ZF` aller Axiome:

1. Das `Extensionalitätsaxiom`: Zwei Mengen A, B sind genau gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen:

$$A \doteq B \leftrightarrow \forall x \big(x \mathrel{\dot{\in}} A \leftrightarrow x \mathrel{\dot{\in}} B\big).$$

2. Das `Nullmengenaxiom` fordert, dass die leere Menge eine Menge ist:

$$\exists A \forall x \, \neg\big(x \mathrel{\dot{\in}} A\big)$$

Als Folgerung des Extensionalitätsaxioms und des Nullmengenaxioms gibt es genau eine leere Menge, die wir natürlich mit $\emptyset$ bezeichnen.

3. Das `Paarmengenaxiom` fordert, dass für alle Mengen A, B auch $\{A, B\}$ eine Menge ist:
$$\forall A\, \forall B\, \exists C\, \forall x \Big(x \,\dot{\in}\, C \leftrightarrow (x \doteq A \vee x \doteq B) \Big).$$
4. Das `Vereinigungsaxiom` besagt, dass mit jeder Menge A von Mengen auch die Vereinigung $\bigcup_{a \in A} a$ aller Elemente von A eine Menge ist:
$$\forall A\, \exists B\, \forall x \left(x \,\dot{\in}\, B \leftrightarrow \exists y \big(y \,\dot{\in}\, A \wedge x \,\dot{\in}\, y \big) \right).$$

   Paarmengenaxiom und Vereinigungsaxiom zusammen garantieren, dass auch die Vereinigung $A_1 \cup A_2$ von zwei Mengen A_1, A_2 eine Menge ist. Dazu bilden wir zuerst die Paarmenge $\{A_1, A_2\}$ und beachten $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{a \in \{A_1, A_2\}} a$.
5. Das `Potenzmengenaxiom` fordert, dass die Menge aller Teilmengen einer Menge A eine Menge ist:
$$\forall A\, \exists B\, \forall x \left(x \,\dot{\in}\, B \leftrightarrow \forall y (y \,\dot{\in}\, x \rightarrow y \,\dot{\in}\, A) \right).$$

ZF: Das Aussonderungs- und Unendlichkeitsaxiom

6. Das `Aussonderungsaxiom`: Für jede Menge A und jede Formel α der Mengenlehre ist $B = \{C \in A \ : \ \alpha(C)\}$ eine Menge. D.h.

$$\forall A \, \exists B \, \forall C \, \big(\, C \mathrel{\dot{\in}} B \leftrightarrow C \mathrel{\dot{\in}} A \wedge \alpha(C)).$$

7. Das `Unendlichkeitsaxiom`: Es gibt eine Menge A, die die leere Menge und mit jedem Element x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält.

$$\exists A \, \big(\, \emptyset \mathrel{\dot{\in}} A \ \wedge \ \forall X \, (\, X \mathrel{\dot{\in}} A \to X \cup \{X\} \mathrel{\dot{\in}} A)\big)$$

Der Schnitt all dieser Mengen A ist die kleinste solche unendliche Menge, nämlich die Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{\emptyset, \, \{\emptyset\}, \, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \, , \ldots\}.$$

Die Bildung der Schnittmenge erfolgt mit Hilfe des Aussonderungsaxioms.

ZF: Das Fundierungs- und Ersetztungsaxiom

8. `Fundierungsaxiom`: Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B mit $A \cap B = \emptyset$

$$\forall A \left(\neg(A \dot{=} \emptyset) \rightarrow \exists B \left(B \dot{\in} A \ \wedge \ \neg\exists C(C \dot{\in} A \wedge C \dot{\in} B)\right)\right).$$

$\Longrightarrow$ Eine Folge $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$ ist nicht möglich, denn $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ widerspricht dem Axiom: Für jedes Element $x_i \in A$ ist $x_{i+1} \in x_i \cap A$
$\Longrightarrow$ Eine Menge kann sich nicht selbst als Element enthalten.

9. Das `Ersetzungsaxiom`: Wird jedes Element einer Menge 1-deutig durch eine Menge ersetzt, so erhält man eine Menge. D.h. für jede Formel $\alpha(X, Y)$ gilt:

$$\forall X, Y, Z \ \left(\ \alpha(X, Y) \ \wedge \alpha(X, Z) \rightarrow Y \dot{=} Z \right) \rightarrow$$
$$\forall A \ \exists B \ \forall C \ \left(\ C \dot{\in} B \leftrightarrow \exists D \ (D \dot{\in} A \ \wedge \ \alpha(D, C)) \ \right).$$

Beachte $B = \{ Y \ : \ D \in A \ \wedge \ \alpha(D, Y) \ \}$.

Semantik

Eine Semantik für Terme

Sei σ eine Signatur und sei $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine σ-Struktur.

Wie sollen wir eine Variable x **interpretieren**?

- In der Aussagenlogik haben wir eine Variable mit dem Wahrheitswert $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$ belegt.
- Jetzt sollten wir die Variable x mit einem beliebigem Element des Universums A belegen!

Belegungen und Interpretationen

(a) Eine **Belegung** in einer σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ ist eine partielle Funktion β von $\textsc{Var}$ nach A, d.h. β ordnet jeder Variablen x, auf der es definiert ist, ein Element $\beta(x)$ aus dem Universum A von $\mathfrak{A}$ zu.

- β ist eine Belegung für einen σ-Term t (bzw. passend zu t), wenn α für alle in t vorkommenden Variablen definiert ist.

(b) Eine **σ-Interpretation** ist ein Paar

$$\mathcal{I} \;=\; (\mathfrak{A}, \beta),$$

bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

- $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine Interpretation für einen σ-Term t (bzw. ist passend zu t), wenn β passend zu t ist.

Die Semantik von Termen (1/2)

Sei σ eine Signatur und t ein σ-Term.

Wir möchten dem Term t eine Bedeutung in der Struktur $\mathfrak{A}$ zuweisen und benutzen dazu eine zu t passende Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.

1. Interpretiere die in t vorkommenden Variablen x durch die Belegung β, ersetze also die Variable durch den Wert $\beta(x)$.
2. Belege die in t vorkommenden Konstantensymbole gemäß ihrer Interpretation in $\mathfrak{A}$ und
3. evaluiere t dann nach und nach gemäß den in $\mathfrak{A}$ gegebenen Interpretationen der Funktionssymbole.

Und was ist damit genau gemeint?

Die Semantik von Termen (2/2)

Sei σ eine Signatur.

Wir definieren eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$ rekursiv über den Aufbau von T_σ, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen Wert

$$[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$$

zuordnet.

Die **Basisregeln**:

- Für alle $x \in \textsc{Var}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $\dot{c} \in \sigma$ ist $[\![\dot{c}]\!]^{\mathcal{I}} := \dot{c}^{\mathfrak{A}}$.

Die **rekursiven Regeln**:

- Für alle Funktionssymbole $\dot{f} \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(\dot{f})$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_r \in T_\sigma$ gilt:

$$[\![\dot{f}(t_1, \ldots, t_r)]\!]^{\mathcal{I}} := \dot{f}^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_r]\!]^{\mathcal{I}}).$$

Die Semantik von Termen: Ein Beispiel

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur und sei $\mathfrak{A} = (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$ eine Struktur mit

- $A \ := \mathbb{N}$
- $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \ := \dot{+}^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$)
- $\dot{c}^{\mathfrak{A}} \ := \dot{0}^{\mathcal{N}}$ (die natürliche Zahl 0)

Sei β eine Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$. Für den Term

$$t := \dot{f}\big(v_2, \dot{f}(v_1, \dot{c})\big)$$

und $\mathcal{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= [\![\dot{f}\big(v_2, \dot{f}(v_1, \dot{c})\big)]\!]^{\mathcal{I}} \\
&= \dot{f}^{\mathfrak{A}}\big(\beta(v_2), \dot{f}^{\mathfrak{A}}\big(\beta(v_1), \dot{c}^{\mathfrak{A}}\big)\big) \\
&= \dot{f}^{\mathfrak{A}}\big(7, \dot{f}^{\mathfrak{A}}(1, 0)\big) \\
&= \big(7 + (1 + 0)\big) = 8.
\end{aligned}$$

Notation: Freie und gebundene Variablen

(a) Eine Formel ψ ist **Teilformel** einer Formel ϕ, wenn ψ ein Teil-Wort in ϕ ist.
Beispiel: $\psi := \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}$ ist Teilformel der Formel $\exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}$.

(b) Jedes Vorkommen einer Variablen x in einer Teilformel von ϕ der Form $\exists x\, \psi$ oder $\forall x\, \psi$ heißt ein **gebundenes** Vorkommen von x. Jedes andere Vorkommen von x heißt **freies** Vorkommen von x. *Beispiel:*

$$\phi \;:=\; \big(\dot{f}(v_0, \dot{c}) \doteq v_3 \wedge \exists v_0 \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}\big)$$

freies Vorkommen von v_0 in ϕ — freies Vorkommen von v_3 in ϕ — gebundene Vorkommen von v_0 in ϕ — freies Vorkommen von v_1 in ϕ

(c) Die Menge $\text{frei}(\phi)$ aller freien Variablen einer $\text{FO}[\sigma]$-Formel ϕ besteht aus allen Variablen, die mindestens einmal frei in ϕ vorkommen. *Beispiele:*

- $\text{frei}\big(\dot{f}(v_0, \dot{c}) \doteq v_3\big) = \{v_0, v_3\}$
- $\text{frei}\big(\exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}\big) = \{v_1\}$
- $\text{frei}\big(\dot{f}(v_0, \dot{c}) \doteq v_3 \wedge \exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}\big) = \{v_0, v_3, v_1\}$

(d) Eine $\text{FO}[\sigma]$-Formel ϕ heißt **Satz** (genauer: $\text{FO}[\sigma]$-Satz), falls sie keine freien Variablen besitzt, d.h. falls $\text{frei}(\phi) = \emptyset$.

Passende Belegungen und Interpretationen

(a) Eine Belegung β ist eine **Belegung für eine FO[σ]-Formel ϕ** (bzw. passend zu ϕ), wenn β für jede freie Variable von ϕ definiert ist.

(b) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine

Interpretation für eine FO[σ]-Formel ϕ (bzw. passend zu ϕ),

wenn β passend zu ϕ ist.

Notation: Zusätzliche Setzung von Variablen

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$, ist $x \in \mathrm{VAR}$ und ist $a \in A$, so ist die Belegung

$$\beta\tfrac{a}{x}$$

identisch mit β bis mgl. auf die Setzung von x mit a, d.h.

$$\beta\tfrac{a}{x}(x) \;=\; a \;\text{ und }\; \beta\tfrac{a}{x}(y) \;=\; \beta(y) \;\text{ f.a. } y \; (y \neq x)\text{, für die } \beta \text{ definiert ist.}$$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \mathrm{VAR}$ und ist $a \in A$, so ist

$$\mathcal{I}\tfrac{a}{x} \;:=\; (\mathfrak{A}, \beta\tfrac{a}{x})$$

die σ-Interpretation, die sich nur in der Behandlung der Variablen x von $\mathcal{I}$ unterscheidet: In $\mathcal{I}\tfrac{a}{x}$ wird x mit a belegt.

Die Definition der Semantik

Eine rekursive Definition der Semantik: Rekursionsanfang

Sei σ eine Signatur.

Wir definieren eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder FO[σ]-Formel ϕ und jeder zu ϕ passenden Interpretationen $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen Wahrheitswert

$$[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$$

zuordnet.

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1 \doteq t_2]\!]^{\mathcal{I}} \; := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(\dot{R})$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_r$ in T_σ gilt:

$$[\![\dot{R}(t_1, \ldots, t_r)]\!]^{\mathcal{I}} \; := \begin{cases} 1, & \text{falls } ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_r]\!]^{\mathcal{I}}) \in \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Rekursionsschritt für die Semantik: Die Junktoren

$$[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![(\phi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![(\phi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![(\phi \to \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ oder } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![(\phi \leftrightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Rekursionsschritt für die Semantik: Die Quantoren

Ist $\phi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \textsc{Var}$, so ist

$$
\begin{aligned}
[\![\exists x\, \phi]\!]^{\mathcal{I}} \quad &:= \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es (mindestens) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![\forall x\, \phi]\!]^{\mathcal{I}} \quad &:= \quad \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

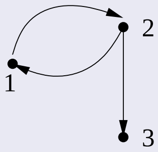
Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{\dot{E}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ besteht. Betrachte die FO[σ_{Graph}]-Formel

$$\phi \;:= \forall x \forall y \big(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x)\big).$$

Für jede zu ϕ passende σ_{Graph}-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned}
[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff & \text{ für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\forall y \big(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x)\big)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\
\iff & \text{ für alle } a \in A \text{ und alle } b \in A \text{ gilt: } \\
& [\![\big(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x)\big)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1 \\
\iff & \text{ für alle } a \in A \text{ und alle } b \in A \text{ gilt: } \\
& \text{falls } [\![\dot{E}(x,y)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1, \text{ so auch } [\![\dot{E}(y,x)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1 \\
\iff & \text{ für alle } a \in A \text{ und alle } b \in A \text{ gilt: } \\
& \text{falls } (a,b) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}}, \text{ so auch } (b,a) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}} \\
\iff & \text{ die Relation } \dot{E}^{\mathfrak{A}} \text{ ist symmetrisch.}
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{A}$ die σ_{Graph}-Struktur, die den gerichteten Graphen



repräsentiert, d.h. $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ mit $A = \{1, 2, 3\}$ und $\dot{E}^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$.

Unser Graph $\mathfrak{A}$ besitzt die Kante $(2, 3)$, nicht aber die Kante $(3, 2)$.
Also ist unser Graph nicht symmetrisch und

$$[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$$

folgt für jede Interpretation $\mathcal{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ mit einer beliebigen Belegung β.

Wann wird eine Formel von einer Interpretation erfüllt?

Sei σ eine Signatur und sei ϕ eine FO[σ]-Formel.

(a) Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine zu ϕ passende σ-Interpretation.

- Wir sagen „$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ **erfüllt** $\boldsymbol{\phi}$“ (bzw. „$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ **ist ein Modell von** $\boldsymbol{\phi}$“, kurz: $\mathcal{I} \models \phi$), falls $[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.
- Wir sagen „$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ **erfüllt** $\boldsymbol{\phi}$“ **nicht** (bzw. „$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ **ist kein Modell von** $\boldsymbol{\phi}$“, kurz: $\mathcal{I} \not\models \phi$), falls $[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

(b) Sei ϕ ein **Satz**, also eine Formel ohne freie Variablen.

- Dann wird ϕ von einer Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ genau dann erfüllt, wenn ϕ von $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta_{\text{leer}})$ für die leere Belegung erfüllt wird.
- Also hängt die Erfüllung von ϕ nur von der Struktur $\mathfrak{A}$ und nicht von der Belegung β ab: An Stelle von „$\mathcal{I} \models \phi$“ schreiben wir dann kurz „$\mathfrak{A} \models \phi$“ und sagen „die σ-Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllt den Satz ϕ.“

Die Prädikatenlogik und SQL

Relationale Datenbanken

Relationale Datenbanken bestehen aus Tabellen, die sich als Relationen auffassen lassen.

- Datenbanken entsprechen also **Strukturen** über einer passenden Signatur.
- Der „Kern“ der in der Praxis gebräuchlichsten Datenbankanfragesprache

  SQL,

  basiert auf der Prädikatenlogik.
  - Viele SQL-Anfragen entsprechen FO[σ]-Formeln.
  - In Datenbankterminologie bezeichnet man die entsprechende Prädikatenlogik oft auch als „relationalen Kalkül“ (engl.: „relational calculus“).

Zur Illustration betrachten wir wieder die Kino-Datenbank.

Eine Kino-Datenbank

Unsere kleine Datenbank besteht aus:

- einer Tabelle **Orte**, die Informationen über Kinos (Kino, Adresse, Telefonnummer) enthält,
- einer Tabelle **Filme** mit Informationen über die Filme (Titel, Regie, Schauspieler) und
- eine Tabelle **Programm** mit Informationen zum aktuellen Kinoprogramm (Kino, Titel, Zeit).

Die Tabelle „Orte“

Kino	Adresse	Telefon
Babylon	Dresdner Str. 2	61609693
Casablanca	Friedenstr. 12	6775752
Cinestar Cubix Alexanderplatz	Rathausstr. 1	2576110
Die Kurbel	Giesebrechtstr. 4	88915998
Filmpalast Berlin	Kurfürstendamm 225	8838551
International	Karl-Marx-Allee 33	24756011
Kino in der Kulturbrauerei	Schönhauser Allee 36	44354422
Moviemento	Kottbusser Damm 22	6924785

Die Tabelle „Filme“

Titel	Regie	Schauspieler
Capote	Bennet Miller	Philip Seymour Hoffman
Capote	Bennet Miller	Catherine Keener
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Martina Gedeck
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Ulrich Tukur
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Ralph Fiennes
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Rachel Weisz
Good Night and Good Luck	George Clooney	David Strathairn
Good Night and Good Luck	George Clooney	Patricia Clarkson
Knallhart	Detlev Buck	Jenny Elvers
Knallhart	Detlev Buck	Jan Henrik Stahlberg
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Wolfgang Völz
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Wolfgang Völz
Requiem	Hans-Christian Schmid	Sandra Hüller
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Nadja Uhl
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Inka Friedrich
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Andreas Schmidt
Syriana	Stephen Gaghan	George Clooney
Syriana	Stephen Gaghan	Matt Damon
V wie Vendetta	James McTeigue	Natalie Portman
Walk the Line	James Mangold	Joaquin Phoenix
Walk the Line	James Mangold	Reese Witherspoon

Die Tabelle „Programme“

Kino	Titel	Zeit
Babylon	Capote	17:00
Babylon	Capote	19:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	17:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	20:15
International	Das Leben der Anderen	14:30
International	Das Leben der Anderen	17:30
International	Das Leben der Anderen	20:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	15:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	17:45
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	20:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	18:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	20:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	22:45
Babylon	Sommer vorm Balkon	21:45
Kino in der Kulturbrauerei	Sommer vorm Balkon	21:45
Filmmuseum Potsdam	Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	22:00

Die Kino-Signatur σ_{Kino}

Die Signatur σ_{Kino} besteht aus:

- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Orte}}$,
- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Filme}}$,
- einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{\mathit{Programm}}$
- und Konstantensymbolen $\dot{c}$ für **jedes** Wort c über dem ASCII-Alphabet. Damit werden alle potentiellen Einträge c der Datenbank ermöglicht wie etwa

  $\dot{\mathit{Babylon}}$, $\dot{\mathit{Casablanca}}$, ..., $\dot{\mathit{Capote}}$, $\dot{\mathit{Das\ Leben\ der\ Anderen}}$, ... usw., aber auch z.B. $\dot{\mathit{Stephen\ Spielberg}}$ oder $\dot{\mathit{Lola\ rennt}}$.

Die Kino-Struktur $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$

Die σ_{Kino}-Struktur $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ hat als Universum die Menge

$$A_{\text{Kino}} := \text{ASCII}^*$$

aller Worte über dem ASCII-Alphabet sowie die 3-stelligen Relationen

$$\begin{aligned}
\dot{Orte}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Babylon}, \text{Dresdner Str. 2}, 61609693), \\
& (\text{Casablanca}, \text{Friedenstr. 12}, 6775752), \dots, \\
& (\text{Moviemento}, \text{Kottbusser Damm 22}, 6924785)\}, \\
\dot{Filme}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Philip Seymour Hoffman}), \\
& (\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Catherine Keener}), \dots, \\
& (\text{Walk the Line}, \text{James Mangold}, \text{Reese Witherspoon})\}, \\
\dot{Programm}^{\mathfrak{A}_{\text{Kino}}} := \{ \quad & (\text{Babylon}, \text{Capote}, \text{17:00}), \\
& (\text{Babylon}, \text{Capote}, \text{19:30}), \\
& (\text{Kino in der Kulturbrauerei}, \text{Capote}, \text{17:30}), \dots \}
\end{aligned}$$

Wie sind die Konstantensymbole zu interpretieren?

Die Kino-Struktur $\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}$: Die Konstantensymbole

Die Struktur $\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}$ interpretiert das Konstantensymbol $\dot{c}$ durch

$$\dot{c}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} := c.$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathit{Babylon}}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} &= \text{Babylon}, \\
\dot{\mathit{Capote}}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} &= \text{Capote}, \\
\dot{\mathit{George\ Clooney}}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} &= \text{George Clooney} \\
\dot{17:00}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} &= 17{:}00 \\
\dot{61609693}^{\mathfrak{A}_{\mathsf{Kino}}} &= 61609693.
\end{aligned}$$

Die Variablen

Um Lesbarkeit zu verbessern, verwenden wir die Variablennamen

- x_K für Kino,
- x_A für Adresse,
- x_{Tel} für Telefonnummer,
- x_T, z_T für Titel,
- x_R für Regisseur,
- x_S für Schauspieler und
- x_Z für Zeit.

Anfragen an die Kinodatenbank (1/4)

„*Gib die Titel aller Filme aus, die um 17:30 Uhr laufen.*“

(a) Eine Formulierung in der Datenbankanfragesprache SQL:

```
SELECT   Titel
FROM     Programm
WHERE    Zeit = 17:30
```

Eine Formulierung durch eine Formel der Prädikatenlogik:

$$\phi_{\text{Filme um 17:30 Uhr}}(x_T) \;:=\; \exists x_K \; \dot{Programm}(x_K, x_T, \dot{17{:}30}).$$

„Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt oder Regie führt.“

(b) Diesmal suchen wir eine Formel

$$\phi_{\text{Filme mit George Clooney}}(x_{\text{T}}),$$

die genau dann in der Struktur $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ wahr ist, wenn T der Titel eines Films ist, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{Filme mit George Clooney}}(x_{\text{T}}) := \big(\, & \exists x_{\text{R}}\, \dot{Filme}(x_{\text{T}}, x_{\text{R}}, George\dot{\ }Clooney) \ \vee \\ & \exists x_{\text{S}}\, \dot{Filme}(x_{\text{T}}, George\dot{\ }Clooney, x_{\text{S}})\,\big).\end{aligned}$$

„Gib Name und Adresse aller Kinos aus, in denen ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt."

(c) Eine Formulierung in SQL:

```
SELECT   Orte.Kino, Orte.Adresse
FROM     Orte, Filme, Programm
WHERE    Orte.Kino = Programm.Kino AND
         Filme.Titel = Programm.Titel AND
         (Filme.Schauspieler = George Clooney OR
          Filme.Regie = George Clooney)
```

Eine Formulierung in der Prädikatenlogik: $\phi_{\text{Kinos mit George Clooney}}(x_K, x_A) :=$

$$\Big(\quad \exists x_{Tel}\, \dot{Orte}(x_K, x_A, x_{Tel}) \ \wedge$$
$$\exists x_T \exists x_Z \ \big(\ \dot{Programm}(x_K, x_T, x_Z) \ \ \wedge$$
$$\big(\exists x_R\, \dot{Filme}(x_T, x_R, \dot{George\ Clooney}) \vee$$
$$\exists x_S\, \dot{Filme}(x_T, \dot{George\ Clooney}, x_S) \big) \big) \Big)$$

„Gib die Titel aller Filme aus, in denen nur Schauspieler mitspielen, die schon mal mit Stephen Spielberg zusammengearbeitet haben.“

(d) lässt sich in der Prädikatenlogik wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
&\phi_{\text{Filme mit Spielberg-Schauspieler}}(x_{\mathrm{T}}) \;:= \\
&\exists x_R \exists x_S \big(\dot{Filme}(x_T, x_R, x_S) \;\wedge \\
&\qquad \forall y_S \; \big(\dot{Filme}(x_T, x_R, y_S) \rightarrow \exists z_T \; \dot{Filme}(z_T, Stephen\ \dot{S}pielberg, y_S) \big) \big)
\end{aligned}$$

Was kann in der Prädikatenlogik
nicht ausgedrückt werden?

Prädikatenlogik: Grenzen (1/2)

Die Signatur $\sigma_{\text{Graph}} := \{\dot{E}\}$ besteht aus einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$.

(a) Es gibt keine FO[σ_{Graph}]-Formel ψ mit freien Variablen x und y, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und jede zu ψ passende Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \text{ erfüllt } \psi \iff$$
$$\text{es gibt in } \mathfrak{A} \text{ einen Weg von Knoten } \beta(x) \text{ zu Knoten } \beta(y).$$

(b) Es gibt keinen FO[σ_{Graph}]-Satz ϕ, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \text{ erfüllt } \phi \iff \mathfrak{A} \text{ ist azyklisch.}$$

(c) Es gibt keinen FO[σ_{Graph}]-Satz ϕ', so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \text{ erfüllt } \phi' \iff \mathfrak{A} \text{ ist stark zusammenhängend.}$$

Prädikatenlogik: Grenzen (2/2)

Was bedeuten diese Aussagen?

In der Prädikatenlogik lassen sich die Eigenschaften

- „azyklisch zu sein“, bzw.
- „stark zusammenhängend zu sein“, bzw.
- „durch einen Weg verbunden zu sein“

nicht mit Hilfe der Signatur σ_{Graph} formalisieren. Eine Formalisierung innerhalb der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre ist aber **möglich**.

Semantische Folgerung

Semantische Folgerung

Sei σ eine Signatur. Φ ist eine Menge von FO[σ]-Formeln und ψ ist eine FO[σ]-Formel. Wir sagen,

$$\psi \text{ folgt aus } \Phi, \quad (\text{kurz: } \Phi \models \psi),$$

falls für jede, zu allen Formeln in Φ und ψ passende Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Falls f.a. } \phi \in \Phi \quad \underbrace{\mathcal{I} \models \phi}_{\text{d.h. } [\![\phi]\!]^{\mathcal{I}} = 1} \quad , \quad \text{so auch} \quad \underbrace{\mathcal{I} \models \psi.}_{\text{d.h. } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1}$$

Die Addition in den natürlichen Zahlen (1/2)

Wir schauen uns wieder die Signatur

$$\sigma_{\mathsf{Ar}}^{+} := \{\dot{+}, \dot{<}, \dot{0}, \dot{1}\},$$

an, wobei $\dot{+}$ ein 2-stelliges Funktionssymbol, $\dot{<}$ ein 2-stelliges Relationssymbol und $\dot{0}$ und $\dot{1}$ Konstantensymbole sind.

In FO[σ_{Ar}^{+}]-Formeln können wir Aussagen über die Addition in den natürlichen Zahlen machen. Wir betrachten deshalb die σ_{Ar}^{+}-Struktur

$$\mathcal{N}_{+} := (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathcal{N}}, \dot{<}^{\mathcal{N}}, \dot{0}^{\mathcal{N}}, \dot{1}^{\mathcal{N}}),$$

- wobei $\dot{+}^{\mathcal{N}}$ und $\dot{<}^{\mathcal{N}}$ die natürliche Addition bzw. die Kleiner-Relation auf $\mathbb{N}$ sind
- und $\dot{0}^{\mathcal{N}} := 0$, $\dot{1}^{\mathcal{N}} := 1$ gilt.

Gibt es ein Axiomensystem, aus dem sich genau die Sätze aus FO[σ_{Ar}^{+}] **folgern** lassen, die in der σ_{Ar}^{+}-Struktur $\mathcal{N}_{+}$ **wahr** sind?

Die Addition in den natürlichen Zahlen (2/2)

Das Axiomensystem Φ_P der Presburger-Arithmetik:

$$\begin{array}{llll}
(P1) & \neg(x\dot{+}1\doteq 0), & (P2) & x\dot{+}1\doteq y\dot{+}1 \rightarrow x\doteq y, \\
(P3) & x\dot{+}0\doteq x, & (P4) & x\dot{+}(y\dot{+}1)\doteq(x\dot{+}y)\dot{+}1, \\
(P5) & \neg(x\dot{<}0), & (P6) & (x\dot{<}y\dot{+}1) \leftrightarrow x\dot{<}y \vee x\doteq y, \\
 & & (P7) & x\dot{<}y \vee x\doteq y \vee y\dot{<}x,
\end{array}$$

Weiterhin wird das Induktionsaxiom

$$\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x\dot{+}1)) \rightarrow \phi$$

für jede FO[σ_{Ar}^{+}] Formel $\phi(x)$ gefordert.

Für alle FO[σ_{Ar}^{+}]-Sätze ϕ gilt

$$\mathcal{N}_{+} \models \phi \iff \Phi_P \models \phi.$$

Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen

Die Presburger-Arithmetik ist ein Axiomensystem für die Addition natürlicher Zahlen.

Können wir auch ein Axiomensystem finden, wenn wir neben der **Addition** auch die **Multiplikation** als Funktionssymbol zulassen?

1. Die erste Antwort ist klar, wenn wir **alle** wahren Aussagen auch als Axiome verwenden.
2. Aber Axiomensysteme sollte man doch „einfach beschreiben“ können!

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz: Es gibt kein einfach beschreibbares Axiomensystem für die Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen. **:-((**

Und die Konsequenz: Komplexe Realitäten wie die σ_{Ar}-Struktur $\mathcal{N}$ lassen sich nicht beschreiben und lassen sich insbesondere nicht im Rechner modellieren!

Die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre, Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese

Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese

Die beiden folgenden Aussagen können in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre $\mathtt{ZF}$ formalisiert werden, sind aber **nicht** Folgerungen von $\mathtt{ZF}$.

(a) Das **Auswahlaxiom**:

Für alle Mengen A, deren Elemente paarweise disjunkte Mengen sind, gibt es eine Menge B, die genau ein Element aus jedem Element von A enthält.

(b) Die **Kontinuumshypothese**:

Jede überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen ist gleichmächtig mit der Menge der reellen Zahlen.

Gilt das Auswahlaxiom? Ist die Kontinuumshypothese richtig?
Es gibt absolute Erkenntnis-Grenzen!