

Übungsblatt 3

Ausgabe: 30.10.2018
Abgabe: 06.11.2018

Aufgabe 3.1 *Modellierung mit Aussagenlogik: Zombifizierung* ((12+2+6)+5=25 Punkte)

Sie befinden sich im Jahr 2022, dem dritten Jahr nach der großen Zombifizierung, und Sie sind eine(r) der letzten „Überunlebenden“. (Sie sind also ein Zombie!) Leider sind Sie in Ihrem Alltag (spazieren gehen, Gehirne essen, ...) ständigen Bedrohungen ausgesetzt. Gerade jetzt werden Sie beim Mittagessen (in einem Hörsaal der Goethe-Universität) von einem wütenden Mob umzingelt, der Sie mit gefährlichen Waffen wie etwa Mistgabeln, Fackeln, Kettensägen oder Übungsblättern bedroht. Ihre einzige Chance besteht darin, Ihren an der Bockenheimer Warte geparkten Mähdrescher zu erreichen und aus der Stadt zu fliehen. Andernfalls sind Sie „dem Untergang geweiht“!

Aus früheren Attacken ist bekannt, dass Zombies ihren Mähdrescher genau dann nicht erreichen können, wenn alle folgenden **Fakten** zutreffen:

- A. Der Mob ist mit Fackeln oder mit Übungsblättern bewaffnet, aber niemals mit beidem.
- B. Der Mob hat genau dann keine Mistgabeln dabei, wenn er mit Kettensägen und Übungsblättern bewaffnet ist.
- C. Nur wenn der Mob keine Kettensägen hat, kann er mit Mistgabeln oder Fackeln bewaffnet sein.
- D. Seit der großen Zombifizierung ist jeder anständige Mob mit Fackeln bewaffnet.

Modellieren Sie die Situation und verwenden Sie im Folgenden die aussagenlogischen Variablen:

- F** für „der Mob ist mit **F**ackeln bewaffnet“,
- M** für „der Mob ist mit **M**istgabeln bewaffnet“,
- K** für „der Mob ist mit **K**ettensägen bewaffnet“,
- Ü** für „der Mob ist mit **Ü**bungsblättern bewaffnet“.

- a)
 - i) Beschreiben Sie die Fakten A, B, C und D durch Formeln φ_A , φ_B , φ_C und φ_D .
 - ii) Geben Sie eine Formel ψ_{Fakt} an, die ausdrückt, dass alle vier Fakten zutreffen.
 - iii) Sind Sie als Zombie dem Untergang geweiht? Geben Sie alle Kombinationen von Bewaffnungen an, sodass Sie Ihren Mähdrescher **nicht** erreichen können (und somit dem Mob zum Opfer fallen) oder begründen Sie, weshalb Sie Ihren Mähdrescher immer erreichen können (und somit vor jedem Mob sicher sind).

In den Teilaufgaben a) i) und a) ii) sind keine Begründungen erforderlich.

- b) Was drückt die Formel $\xi := \mathbf{F} \oplus \mathbf{M} \oplus \mathbf{K}$ aus? Eine umgangssprachliche Beschreibung genügt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.2 *Erfüllbarkeit, Tautologien, Widersprüche* (16 + 14 = 30 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig,
- unerfüllbar oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar

ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort, z. B. durch Angabe einer Wahrheitstafel.

i) $\varphi_1 := \neg(A \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))) \rightarrow B$ iii) $\varphi_3 := \neg(X \rightarrow Y) \vee ((X \wedge \neg Y) \rightarrow \mathbf{0})$
 ii) $\varphi_2 := (\mathbf{1} \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow \mathbf{0})$ iv) $\varphi_4 := (\neg A \leftrightarrow B) \oplus \neg(A \leftrightarrow B)$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen \mathcal{B} mit $\text{Def}(\mathcal{B}) = \text{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := (B \vee \neg A) \leftrightarrow (B \vee A)$ iii) $\psi_3 := \bigwedge_{i=1}^n (V_i \leftrightarrow \neg V_{i+1})$, wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$
 ii) $\psi_2 := \bigwedge_{i=1}^{136} (V_i \rightarrow V_{i+1}) \wedge (V_{137} \rightarrow V_1)$

Aufgabe 3.3 *Semantische Folgerungen und Äquivalenzen* (15 + 15 = 30 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden Formeln.

- $\varphi_1 := \neg B \wedge (A \vee C)$ • $\varphi_3 := \neg A \rightarrow C$
- $\varphi_2 := (\neg A \leftrightarrow C) \wedge \neg B$ • $\varphi_4 := ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg C) \vee C$

Finden Sie unter den obigen Formeln eine Formel φ_i mit $\varphi_i \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$. Gibt es eine solche Formel überhaupt? Begründen Sie in jedem Fall Ihre Antwort.

b) Seien φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

- i) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\varphi) \models \psi$.
- ii) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$.
- iii) Wenn $\varphi \models \chi$, dann $(\psi \rightarrow \varphi) \models (\psi \rightarrow \chi)$.

Aufgabe 3.4 *Dämonen-Rätsel* (15 Punkte)

Sie betreten einen antiken Tempel. Am Kopfe sitzen nebeneinander drei Dämonen: der Dämon der Wahrhaftigkeit, der Dämon der Täuschung und der Dämon der Diplomatie. Der Dämon der Wahrhaftigkeit sagt immer die Wahrheit, der Dämon der Täuschung lügt immer und der Dämon der Diplomatie ist unvorhersehbar: Mal sagt er die Wahrheit, mal lügt er. Sie möchten wissen, welcher Dämon wo sitzt. Deswegen fragen Sie die Dämonen, welcher von ihnen in der Mitte sitzt.

Sie erhalten folgende Antworten:

- Der linke Dämon sagt: „In der Mitte sitzt der Dämon der Wahrhaftigkeit.“
- Der mittlere Dämon sagt: „In der Mitte sitzt der Dämon der Täuschung.“
- Der rechte Dämon sagt: „In der Mitte sitzt der Dämon der Diplomatie.“

Finden Sie heraus, welcher Dämon wo sitzt. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg und begründen Sie, warum Ihre Antwort die einzig richtige ist.