Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übung 10

Ausgabe: 18.12.18
Abgabe: 15.01.19

Sie dürfen einen Matrizenrechner als Hilfsmittel verwenden. (z. B. https://matrixcalc.org/de)

Aufgabe 10.1. *Irreduzibilität und Aperiodizität* $(12 + 18 = 30$ Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3. Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), welche der Graphen irreduzibel und/oder aperiodisch sind, und welche nicht.

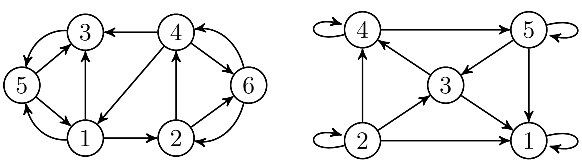


Abbildung 1: Links: G_1. Mitte: G_2. Rechts: G_3.

b) Wir führen drei Fantasiefiguren *Krabbe*, *Elefant* und *Polarfuchs* auf einem 10×10-Schachbrett ein. Die möglichen Züge der drei Figuren finden Sie in Abbildung 2.

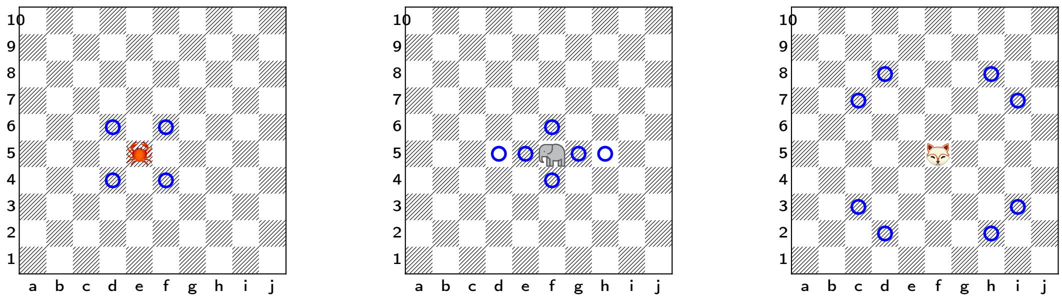


Abbildung 2: Links: Die Krabbe zieht ein Feld in diagonaler Richtung. Mitte: Der Elefant zieht entweder ein Feld in vertikaler Richtung oder ein bis zwei Felder in horizontaler Richtung. Rechts: Der Polarfuchs zieht drei Felder in horizontaler und zwei Felder in vertikaler Richtung bzw. umgekehrt. Die möglichen Züge jeder Figur sind mit blauen Kreisen markiert.

Sei $F \in \{\text{Krabbe}, \text{Elefant}, \text{Polarfuchs}\}$ eine Figur. Wir modellieren die Bewegungen von F durch eine Markov-Kette (G_F, P_F) mit den Zuständen $V := \{\text{a}, \dots, \text{j}\} \times \{1, \dots, 10\}$. In jedem Zustand $v \in V$ entsprechen die Zustandsübergänge (v, w) den möglichen Zügen von F in Position v, wobei jeder Übergang die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt. Es ist nicht zulässig, dass die Figur auf ihrem Feld stehen bleibt, sie *muss* sich bewegen.

Geben Sie jeweils an, ob die Markov-Kette (G_F, P_F) irreduzibel und/oder aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur F um

i) eine Krabbe, ii) einen Elefanten, iii) einen Polarfuchs

handelt. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort. Sie brauchen die Markov-Kette bzw. ihren Graphen und ihre Übergangsmatrix nicht explizit zu bestimmen!

Aufgabe 10.2. *Karten mischen* (15 + 15 = 30 Punkte)

Alice und Bob spielen Karten mit einem Kartenstapel bestehend aus den drei Karten A, B, C. Die beiden verwenden jeweils ein eigenes Mischverfahren:

- **Alice** zieht die mittlere Karte aus dem Stapel und legt sie dann mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit entweder oben auf den Stapel, steckt sie wieder in die Mitte zwischen die beiden anderen Karten oder legt sie unter den Stapel.
- **Bob** zieht die oberste Karte vom Stapel und steckt sie mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit entweder in die Mitte zwischen die anderen beiden Karten oder legt sie unter den Stapel.

a) Modellieren Sie beide Mischverfahren als Markov-Ketten, indem Sie jeweils den Graphen angeben und seine Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften. Benutzen Sie dazu die Zustandsmenge

$$V := \big\{(A,B,C),\ (A,C,B),\ (C,A,B),\ (C,B,A),\ (B,C,A),\ (B,A,C)\big\},$$

wobei ein Tripel $(I,J,K) \in V$ ausdrückt, dass die Karte I oben, die Karte J in der Mitte und die Karte K unten liegt. (Ordnen Sie die Zustände in der obigen Reihenfolge kreisförmig an.)

b) Wir definieren ein Maß[1] m für die „Zufälligkeit" einer Verteilung $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_6)$:

$$m(\mu) := \max\Big\{|\mu_i - \mu_j| : i,j \in V \text{ und } i \neq j\Big\}$$

Je kleiner $m(\mu)$, desto „zufälliger" (d.h. besser gemischt) ist die Verteilung μ.

Vergleichen Sie die Qualität der Mischverfahren von Alice und Bob. Angenommen, anfangs liegen die Karten in der Reihenfolge (A,B,C) auf dem Stapel. Mit welchem Verfahren sind die Karten besser gemischt, nach

i) einem Schritt?
ii) zwei Schritten?
iii) fünf Schritten?
iv) „unendlich" vielen Schritten?

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Bei Anfangsverteilung $\pi^{(0)}$ und Übergangsmatrix P können Sie die Verteilung nach k Schritten durch $\pi^{(k)} = \pi^{(0)} \cdot P^k$ berechnen. Sie dürfen einen Matrizenrechner als Hilfsmittel verwenden.

Aufgabe 10.3. *Warteschlangen* (6 + (3+3+10+4+6) + 8 = 40 Punkte)

Die Deutsche Post unterhält eine Filiale mit einem Service-Schalter, vor dem sich täglich lange Schlangen bilden. Ein einziger Mitarbeiter ist dort für die Kundenabfertigung zuständig. Aus baulich bedingten Gründen können maximal n Kunden in der Schlange stehen.

In jedem Zeitschritt fertigt der Mitarbeiter den vordersten Kunden der Schlange mit „Abfertigungswahrscheinlichkeit" a ab, der Kunde geht dann nach Hause. Mit Wahrscheinlichkeit $1-a$ hingegen bleibt der Kunde in der Schlange und der Mitarbeiter beschäftigt sich weiterhin mit ihm. Außerdem trifft unabhängig davon in jedem Zeitschritt mit „Kundenwahrscheinlichkeit" k ein neuer Kunde ein. Dieser stellt sich ans Ende der Schlange. Allerdings ist Folgendes zu beachten:

- Ein frisch eingetroffener Kunde verlässt die Filiale direkt wieder, wenn in der Schlange bereits n Kunden stehen und der vorderste Kunde nicht abgefertigt wird. Der Übergang von n nach n hat also die Wahrscheinlichkeit $ka + (1-a)$.
- Bei leerer Schlange kommt ein neuer Kunde direkt dran: Wird abgefertigt, dann verlässt er sofort wieder die Filiale. Ist die Schlange leer und kommt kein neuer Kunde, wird natürlich nicht abgefertigt. Der Übergang von 0 nach 0 hat also die Wahrscheinlichkeit $ka + (1-k)$.

[1] Bessere Maße für die „Zufälligkeit" einer Verteilung sind die quadratische Abweichung $\sum_i (\mu_i - 1/n)^2$ oder die Shannon-Entropie $\sum_i \mu_i \log_2(1/\mu_i)$, die für diese Aufgabe aber unnötig kompliziert sind.

Wir modellieren die Warteschlange als Markov-Kette mit den Zuständen $0, 1, \ldots, n$, wobei Zustand i ausdrückt, dass genau i Kunden in der Schlange stehen. Wir nehmen im Folgenden an, dass $0 < a < 1$ und $0 < k < 1$ gilt.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Markov-Kette für $n = 4$ und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten.

   Hinweis: Benutzen Sie die Abkürzungen $L := a(1-k)$ sowie $R := (1-a)k$.

b) Wir wollen wissen, wie viele Kunden im Erwartungswert (d.h. „durchschnittlich") in der Schlange stehen. Dazu benötigen wir zunächst die Grenzverteilung.

   i) Begründen Sie, warum die Markov-Kette (für jedes $n \in \mathbb{N}$) ergodisch ist.
      Fazit: Grenzverteilung und stationäre Verteilung stimmen überein!

   ii) Berechnen Sie (näherungsweise) die stationäre Verteilung für $n=4$, $a={}^1\!/_3$ und $k={}^1\!/_4$ mithilfe eines Matrixrechners. (Ohne Begründung.)

   iii) Sei $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ die stationäre Verteilung der Kette für allgemeine n, a, k. Zeigen Sie: Für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt $\mu_i = \left(\frac{R}{L}\right)^i \cdot \mu_0$.

      Hinweis: Sei $0 < i < n$. Stellen Sie zunächst eine Gleichung für μ_i in Abhängigkeit von μ_{i-1}, μ_i und μ_{i+1} auf.

   iv) Bestimmen Sie μ_0. Benutzen Sie, dass μ eine Verteilung ist, d. h. dass $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$ gilt.

   v) Berechnen Sie die erwartete Anzahl $E = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \mu_i$ der Kunden in der Warteschlange für die stationäre Verteilung μ.
      Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden: Für $\alpha \neq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{m} j \cdot \alpha^j = \frac{m\alpha^{m+2} - (m+1)\alpha^{m+1} + \alpha}{(\alpha - 1)^2}$$

c) Diskutieren Sie das Ergebnis aus b) v) für den Fall $n \to \infty$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $a > k$, $a = k$ und $a < k$.

Bonusaufgabe 10.4. *Gambler's Ruin* $((5+7+3)+15 = 30$ Extrapunkte)

Wir betrachten erneut die Gambler's-Ruin-Kette aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript).

Sei K das Startkapital des Spielers, N das Kapital des Casinos und $M := K + N$ das Gesamtkapital. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers für eine Partie sei $p \in (0, 1)$ und sei $q := 1 - p$.

a) Es sei s_K die Wahrscheinlichkeit, die Bank zu sprengen, d. h. vom Zustand K aus den Zustand M zu erreichen.

   i) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für s_K in Abhängigkeit von s_{K-1} und s_{K+1} auf. Welche Werte haben s_0 bzw. s_M?

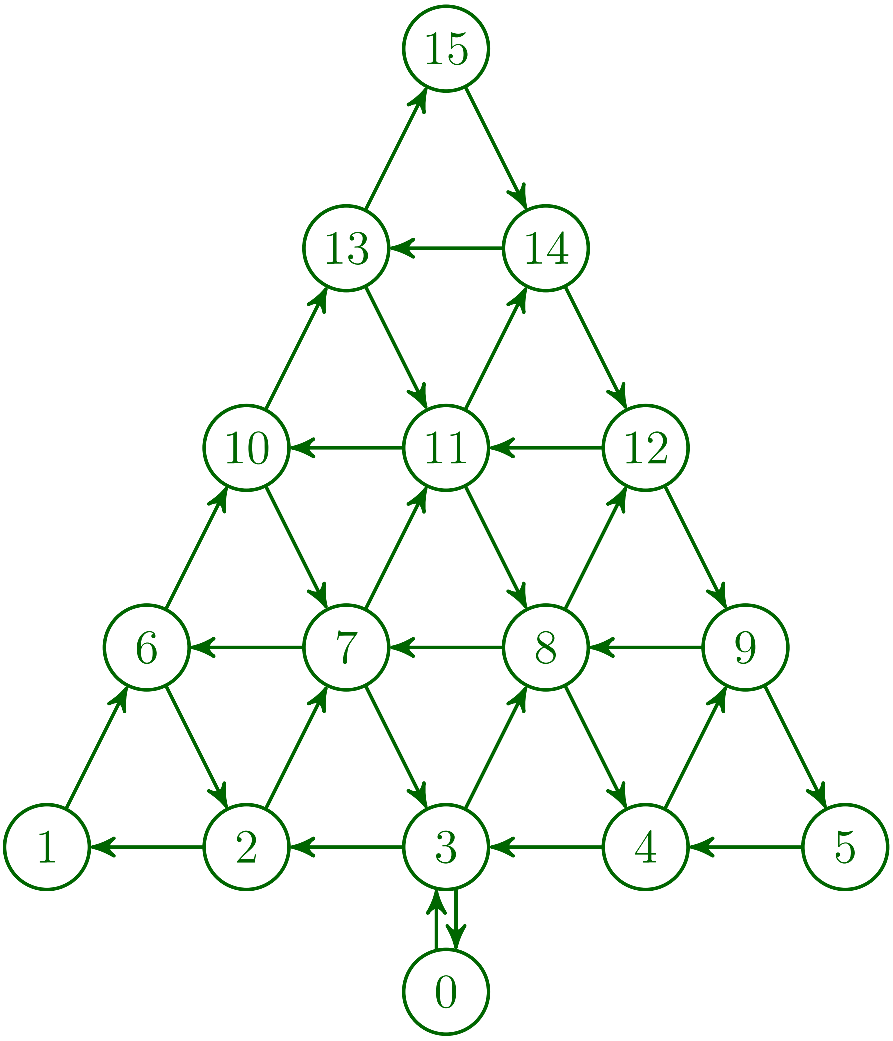
   ii) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K}{1-\frac{q}{p}} \cdot s_1 & \text{falls } p \neq q, \\ K \cdot s_1 & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

      Hinweis: Stellen Sie die Gleichung aus i) nach $s_{K+1} - s_K$ um und expandieren Sie die Gleichung, sodass Sie $s_{K+1} - s_K$ in Abhängigkeit von s_1 und s_0 ausdrücken. Verwenden Sie anschließend eine Teleskopsumme (siehe z. B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Teleskopsumme`).

   iii) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} & \text{falls } p \neq q, \\ \frac{K}{M} & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

b) Es bezeichne d_K die erwartete Spieldauer bei Startkapital K, d. h. die erwartete Anzahl der Schritte bis die Zustände 0 oder M erreicht werden.

   Berechnen Sie d_K analog zum obigen Vorgehen für den Fall $p = {}^1\!/_2$.



Eine besinnliche Denkaufgabe zum Jahresende:
Ist der Weihnachtsbaum aperiodisch?
Ist der Weihnachtsbaum irreduzibel?
Ist der Weihnachtsbaum ergodisch?

Frohe Feiertage und einen tollen Start ins Jahr 2019!