Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 11

Ausgabe: 15.01.19
Abgabe: 22.01.19

Aufgabe 11.1 *Irrfahrten auf ungerichteten Graphen* $(5 + 5 + (5 + 5 + 5) = 25$ Punkte)

Sie haben ein altes schottisches Schloss zu einem extrem günstigen Preis erstanden. Der Grundriss des Schlosses ist unten abgebildet. Angeblich soll es dort spuken, aber wer glaubt denn sowas?! Bei Ihrem ersten nächtlichen Aufenthalt in Ihrem neuen Schloss stellen sie allerdings fest: Es spukt tatsächlich! Der Geist des englischen Langbogenschützen Sir James Edward Roughly läuft jede Nacht in seinen Pantoffeln und mit einer Tasse Tee in der Hand durch das Schloss und kommentiert dabei das schottische Wetter („So kalt, da holt man sich ja den Tod!“).

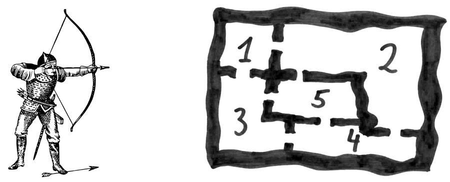


Abbildung 1: Sir James Edward Roughly (links) und der Grundriss des Schlosses (rechts)

Da Roughly zwar sehr freundlich ist, Sie aber jede Nacht mit seinen Kommentaren wach hält, möchten Sie Ihr Bett in einen Raum stellen, in welchem Ihr Mitbewohner möglichst selten auftaucht. Sie wissen, dass er einen soeben betretenen Raum erst im Morgengrauen wieder verlässt, und zwar mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit durch je eine der Türen des Raums.

a) Modellieren Sie die Situation durch eine Markov-Kette (G, P). Es genügt, wenn Sie G in grafischer Darstellung angeben und die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften. Die Übergangsmatrix P müssen Sie nicht angeben.

b) Bestimmen Sie für jeden Raum die Wahrscheinlichkeit, dass Roughly dort auftaucht.

Hinweis: Nutzen Sie das Resultat aus der Vorlesung über Irrfahrten auf ungerichteten Graphen.

c) Eines Nachts gelingt es Ihnen, Roughly in Raum 5 einzusperren und alle Türen dieses Raums zu schließen. Jetzt haben Sie zwar einen Raum weniger, aber dafür sind Sie nachts vor Roughly sicher. Ein paar Nächte später spukt es jedoch erneut. Roughlys Frau (ebenfalls ein Geist) sucht ihren Mann und wandert nun genauso wie Roughly durch das Schloss, jedoch nur durch die Räume 1 bis 4. Dabei murmelt sie stets vor sich hin: „Seit über 1000 Jahren sage ich ihm schon, dass er nicht in nassen Leinengewändern spuken soll, aber er hört ja nicht auf mich! Jetzt hat er sich bestimmt erkältet und ich darf es ausbaden!“

Sei (G', Q) die so entstandene Markov-Kette mit den Zuständen 1, 2, 3 und 4.

i) Hat (G', Q) eine Grenzverteilung?

ii) Wie viele stationäre Verteilungen hat (G', Q)?

iii) Und wie viele stationäre Verteilungen hat die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix Q^2?

Bitte wenden!

Aufgabe 11.2 *Spiel und Spaß im halbautomatischen Labor* (14 + 12 = 26 Punkte)

In Ihrem Labor stehen in einer Reihe drei Gefäße mit Fassungsvermögen 5 Hektoliter, 3 Hektoliter bzw. 8 Hektoliter[1]. Oberhalb der Gefäße befindet sich ein Roboter mit großen Greifarmen, den Sie mit zwei Hebeln steuern können:

- Ziehen Sie den rechten Hebel R, so greift der Roboter das Gefäß in der Mitte und gießt dessen Inhalt in das rechte Gefäß, solange bis das Gefäß in der Mitte leer oder das rechte Gefäß voll ist.
- Ziehen Sie den linken Hebel L, so greift der Roboter das linke Gefäß und gießt dessen Inhalt in das Gefäß in der Mitte, solange bis das linke Gefäß leer oder das in der Mitte voll ist. Anschließend – selbst wenn das linke Gefäß leer war – vertauscht der Roboter die drei Gefäße zyklisch: Das linke Gefäß kommt nach rechts, das mittlere nach links und das rechte in die Mitte.

Anfangs steht das 5-Hektoliter-Gefäß links, das 3-Hektoliter-Gefäß in der Mitte und das 8-Hektoliter-Gefäß rechts. Die ersten beiden sind bis zum Rand gefüllt, während das 8-Hektoliter-Gefäß leer ist.

a) Modellieren Sie das System durch einen DFA. Benutzen Sie das Alphabet $\Sigma = \{L, R\}$ und die Zustandsmenge

$$\left\{ \frac{a\ b\ c}{x\ y\ z} \ : \ a, b, c \in \{0, \ldots, 8\}, \{x, z, y\} = \{3, 5, 8\} \right\}$$

wobei der Zustand $\frac{a\ b\ c}{x\ y\ z}$ ausdrückt, dass die Gefäße in der Reihenfolge $x\ y\ z$ (von links nach rechts) stehen und die Füllstände a, b, c (v. l. n. r.) betragen. Berücksichtigen Sie nur solche Zustände, die vom Startzustand aus erreichbar sind! Sie brauchen keine akzeptierenden Zustände zu spezifizieren. Stellen Sie Ihren DFA grafisch dar, wählen Sie dabei eine möglichst übersichtliche Darstellung möglichst ohne überkreuzende Kanten.

b) Beantworten Sie die folgenden Aufgaben basierend auf Ihrer Modellierung.

i) Während Sie in der Mittagspause waren, hat Ihr Kollege spaßeshalber die Hebel L, L, R, L, R (in dieser Reihenfolge) gezogen. In welchem Zustand befindet sich das System nun? Welche Hebel(folge) müssen Sie betätigen, um den Startzustand wiederherzustellen – sofern das überhaupt möglich ist?

ii) Das Gesundheitsamt verlangt, dass jedes Gefäß vor der weiteren Benutzung zunächst gründlich gereinigt wird. Dazu muss jedes Gefäß einmal vollständig geleert werden. Kann diese Vorgabe eingehalten werden?

iii) Für Ihr Rezept müssen Sie zweimal genau vier Hektoliter abmessen. Welche Hebelfolge müssen Sie betätigen, um gleichzeitig zwei Gefäße mit jeweils vier Hektolitern zu füllen?

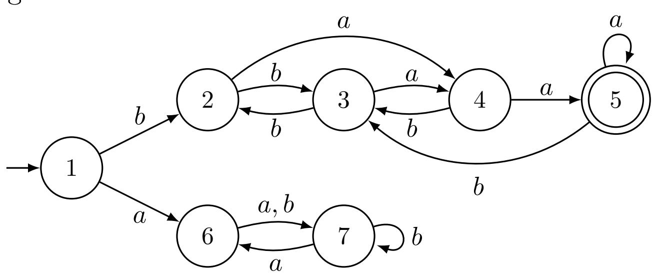
iv) Bevor Sie zur Tat schreiten und die Hebel für Ihr Rezept (aus Teil iii)) betätigen können, meldet die automatische Systemdiagnose, dass Hebel R klemmt – er kann nicht mehr betätigt werden. Können Sie dennoch Ihr Rezept vollenden?

Bitte wenden!

[1]Ganz recht, das sind drei Fibonaccizahlen. Spielt in der Aufgabe aber keine Rolle. Trotzdem: gut aufgepasst!

Aufgabe 11.3 *DFAs lesen und DFAs konstruieren* $(8+(8+9) = 25$ Punkte$)$

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A:



Beschreiben Sie die Sprache $L(A)$ mathematisch oder umgangssprachlich.

b) Geben Sie für folgenden beiden Sprachen L_1 und L_2 jeweils einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen an, der diese Sprache akzeptiert.

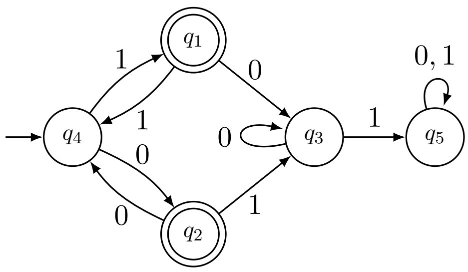
i) $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ endet auf } ababb\}$

ii) $L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* : \text{die letzten beiden Buchstaben von } w \text{ sind verschieden.}\}$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen notwendig.

Aufgabe 11.4 *Verschmelzungsrelation* $((4+4+4)+(6+6) = 24$ Punkte$)$

a) Betrachten Sie den folgenden DFA A über $\Sigma = \{0,1\}$.



i) Weisen Sie die folgenden Inäquivalenzen bzgl. der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ nach, indem Sie geeignete Zeugen angeben.

- $q_2 \not\equiv_A q_3$
- $q_3 \not\equiv_A q_4$

ii) Gibt es in A zwei verschiedene Zustände q_i und q_j mit $q_i \equiv_A q_j$? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie außerdem alle Äquivalenzklassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_A$ an.

iii) Welche Sprache akzeptiert A? Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung an.

b) Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Seien außerdem $p, q \in Q$ beliebige Zustände und $a \in \Sigma$ ein beliebiger Buchstabe.

Zeigen oder widerlegen Sie:

i) Wenn $p \equiv_A q$ gilt, dann gilt $\delta(p,a) = \delta(q,a)$.

ii) Wenn $p \not\equiv_A q$ gilt, dann gilt $p' \not\equiv_A q'$ für alle $p', q' \in Q$ mit $\delta(p',a) = p$ und $\delta(q',a) = q$.