Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 12

Ausgabe: 22.01.19
Abgabe: 29.01.19

Aufgabe 12.1 *Modellierung* (10 + 10 + 10 Punkte + 25 Extrapunkte)

Obwohl Sie sich ausschließlich von Spaghetti (kurz: σ) und Pizza (kurz: π) ernähren, achten Sie als gesundheitsbewusster Mensch natürlich stets auf eine ausgewogene Ernährung. Sie haben sich daher die folgenden Ernährungsregeln überlegt (für $p \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$):

R_1: „Für jeden Tag gilt: Entweder ich esse Pizza oder ich esse Spaghetti."

R_2: „An höchstens p aufeinanderfolgenden Tagen esse ich Pizza."

R_3: „An mindestens s Tagen esse ich Spaghetti."

Um Ihr Essverhalten zu überblicken, notieren Sie sich für jeden Tag, welche Mahlzeit Sie zu sich genommen haben. In unregelmäßigen Abständen überprüfen Sie anhand Ihrer Notizen, ob Sie Ihre Ernährungsregeln eingehalten haben.

a) Konstruieren Sie einen DFA A_p über $\Sigma = \{\sigma, \pi\}$ mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln R_1 und R_2 eingehalten haben.

b) Konstruieren Sie einen DFA A_s über $\Sigma = \{\sigma, \pi\}$ mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln R_1 und R_3 eingehalten haben.

c) Konstruieren Sie einen DFA $A_{p,s}$ über $\Sigma = \{\sigma, \pi\}$ mit möglichst wenigen Zuständen, der beschreibt, dass Sie die Regeln R_1, R_2 und R_3 eingehalten haben.

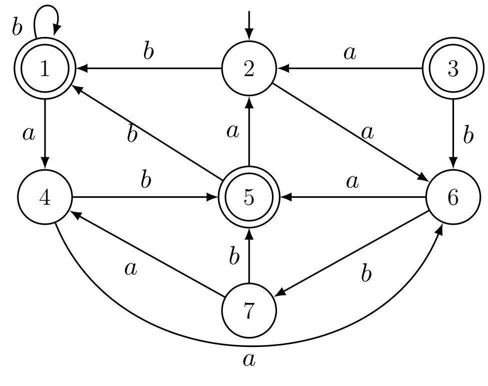
Hinweis: Konstruieren Sie einen DFA $A_{p,s}$, der $L(A_p) \cap L(A_s)$ akzeptiert. Die Automaten A_p und A_s werden durch $A_{p,s}$ „gleichzeitig" simuliert. Wie müssen die Zustandsmenge Q, die Übergangsfunktion δ, der Startzustand q_0 und die Menge F der akzeptierenden Zustände gewählt werden?

d*) Zeigen Sie: $\text{Index}\big(L(A_{p,s})\big) \geq p \cdot s$.

Erläutern Sie jeweils kurz Ihre Modellierung und skizzieren Sie die Zustandsdiagramme. Sie können Teilpunkte erhalten, wenn Sie diese Aufgabe für $s = 2$ und $p = 3$ lösen.

Aufgabe 12.2 *Minimierung von DFAs* (25 Punkte)

Der DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $q_0 = 2$ und $F = \{1, 3, 5\}$ sei durch die Grafik rechts gegeben.



Minimieren Sie A, d. h. bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A'. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung und geben Sie die Tabelle an, in der Paare inäquivalenter Zustände mit den Mengen M_i markiert sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 *Nerode-Automat* (15 + 10 = 25 Punkte)

a) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Bestimmen Sie für die Sprache

$$L := \big\{w \in \Sigma^* : |w| \geq 2, \text{ der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind gleich}\big\}$$

den Nerode-Automaten in folgenden Schritten:

i) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen der Wörter ε, a und aa durch Angabe aller in ihr enthaltenen Elemente: $[\varepsilon]_L = \{\dots\}$, $[a]_L = \{\dots\}$ und $[aa]_L = \{\dots\}$.

ii) Geben Sie das Zustandsdiagramm des Nerode-Automaten an.

Hinweis: Um alle Äquivalenzklassen zu bestimmen, beginnen Sie mit der Äquivalenzklasse $[\varepsilon]_L$ des leeren Wortes. Was passiert im Nerode-Automaten, wenn nun ein a bzw. b gelesen wird? Sind die Wörter a, b äquivalent zu ε? Welche Äquivalenzklassen treten auf, wenn weitere Buchstaben gelesen werden? Welche Elemente enthalten diese Äquivalenzklassen?

b) Geben Sie den Nerode-Automaten für die Sprache $L := \{abb, bab\} \cdot \Sigma^*$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$ an.

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen erforderlich.

Aufgabe 12.4 *Addition von Dualzahlen* (20 Punkte)

Jede natürliche Zahl n lässt sich als *Dualzahl*, d. h. in der Form $[n]_2 = z_l z_{l-1} \cdots z_0$ darstellen, so dass $z_i \in \{0, 1\}$ für $0 \leq i \leq l$ mit $l \in \mathbb{N}$ ist und $n = \sum_{i=0}^{l} z_i \cdot 2^i$ gilt. Die Zahl $[n]_2$ wird als die *Dualdarstellung* der Zahl n bezeichnet. Dualzahlen können auf herkömmliche Weise schriftlich addiert werden, wobei der Übertrag bei der „Zwei" erfolgt.

Gegeben sei das Alphabet

$$\Sigma := \left\{ \boxed{\begin{array}{c}0\\0\\\hline 0\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}0\\1\\\hline 0\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}0\\1\\\hline 1\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}1\\0\\\hline 1\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}1\\1\\\hline 0\end{array}}, \boxed{\begin{array}{c}1\\1\\\hline 1\end{array}} \right\}.$$

Geben Sie einen DFA A an, der ein Wort w aus Σ^* genau dann akzeptiert, wenn w eine korrekte Addition zweier Dualzahlen $[n]_2$ und $[m]_2$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ darstellt, d. h. wenn die dritte Zeile die Summe der ersten beiden Zeilen ist. So ist beispielsweise $w \in L(A)$ für

$$w = \boxed{\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}}\boxed{\begin{array}{c}1\\1\\\hline 1\end{array}}\boxed{\begin{array}{c}0\\1\\\hline 0\end{array}}\boxed{\begin{array}{c}1\\1\\\hline 0\end{array}} \quad \text{, weil} \quad \begin{array}{rcr} & 0101 = & [5]_2 \\ + & 0111 = & [7]_2 \\ \hline & 1100 = & [12]_2 \end{array} \quad .$$

Nehmen Sie an, dass auch das leere Wort ε akzeptiert wird.

Hinweis: Beachten Sie, dass ein endlicher Automat jedes Wort von links nach rechts, d. h. von den höchstwertigen zu den niedrigstwertigen Bits liest. Begründen Sie kurz, warum der von Ihnen angegebene DFA die verlangte Sprache akzeptiert.