Theoretische Informatik 1 / Algorithmentheorie

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser,
Dipl. Inf. Matthias Poloczek

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 10

Ausgabe: 24.01.2013
Abgabe: 31.01.2013 **vor** der Vorlesung

10.1. Aufgabe (4)

Wir wollen die Begriffe *entscheidbar*, *unentscheidbar* sowie NP-*hart* miteinander in Beziehung setzen. Sind die nachfolgenden Behauptungen unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ wahr? **Begründe** Deine Antworten.

a.) Für entscheidbare Sprachen gibt es stets einen deterministischen Polynomialzeit Algorithmus.

b.) Alle Sprachen in NP sind NP-hart.

c.) Die Klasse NP enthält auch unentscheidbare Sprachen.

d.) Alle NP-harten Sprachen sind auch unentscheidbar.

10.2. Aufgabe (8)

Im Skript (S. 177) werden quantifizierte boolesche Formeln eingeführt: Eine quantifizierte boolesche Formel ϕ hat die Form

$$\phi \equiv Q_1 x_1 Q_2 x_2 Q_3 x_3 \cdots Q_n x_n \; \alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

α ist eine konventionelle aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform; für $Q_1, \ldots, Q_n$ kann jeweils der Allquantor $\forall$ oder der Existenzquantor $\exists$ gewählt werden.

Alle nachfolgend geforderten Algorithmen müssen mit Speicherplatz $O(n)$ auskommen, wobei n die Anzahl der Variablen ist.

a.) Zuerst nehmen wir an, dass nur Existenzquantoren auftreten. **Beschreibe** einen deterministischen Algorithmus, der eine solche Formel ϕ genau dann akzeptiert, wenn ϕ wahr ist (Beachte, dass ϕ genau dann wahr ist, wenn α erfüllbar ist).

b.) Diesmal betrachten wir nur Formeln ϕ, die aus zwei Blöcken von Quantoren bestehen, nämlich aus einem ersten Block von Existenzquantoren, gefolgt von einem Block von Allquantoren. Wie in Teil a.) beschreibe einen deterministischen Algorithmus, der genau die wahren Formeln akzeptiert.

c.) Zuletzt nehmen wir an, dass die Quantoren aus k Blöcken bestehen. Gib auch diesmal einen deterministischen Algorithmus an.

Natürlich genügt eine Antwort für Teil c.) für eine vollständige Lösung der Gesamtaufgabe.

Also ist QBF insbesondere entscheidbar. Warum gehört QBF wahrscheinlich nicht zur Klasse NP?

10.3. Aufgabe (8)

Wir definieren das Spiel $GEOGRAPHY$. Dieses Spiel verallgemeinert das Geographie-Spiel, bei dem zwei Spieler abwechselnd noch nicht genannte Städtenamen wählen, wobei jede Stadt mit dem Endbuchstaben der zuvor genannten Stadt beginnen muß.

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein ausgezeichneter Knoten $s \in V$.

Das Spiel: Zwei Spieler A und B wählen abwechselnd jeweils einen noch nicht gewählten Knoten aus V. Spieler A fängt an.

Der zu Beginn des Spiels gewählte Knoten muss ein direkter Nachfolger von Startknoten s sein. Jeder anschließend gewählte Knoten muss direkter Nachfolger des zuvor gewählten Knotens sein und darf vorher noch nicht besucht worden sein.

Der Spieler, der als erster keinen solchen unbenutzten Knoten mehr findet, verliert das Spiel.

Aufgabe: Es ist zu entscheiden, ob Spieler A, bei nachfolgend optimalem Spiel, einen gewinnenden ersten Zug hat, d.h. bei optimalem Spiel stets gewinnt.

Zeige, dass $GEOGRAPHY$ durch einen deterministischen Algorithmus mit höchstens $\text{poly}(n)$ Speicherplatz gelöst werden kann, wobei $n = |V|$ die Anzahl der Knoten in G ist. Also ist $GEOGRAPHY$ insbesondere entscheidbar.

10.4. Aufgabe (4)

Zeige, dass die beiden folgenden Probleme entscheidbar bzw. berechenbar sind. Es genügt also die Angabe stets haltender Algorithmen; dabei müssen weder die Laufzeit noch der Speicherplatz bestimmt werden.

a.) Gegeben sei ein C++ Programm P und eine Eingabe x mit $|x| = n$. Entscheide, ob P auf Eingabe x nach höchstens n Schritten hält.

b.) Gegeben ist ein ungerichteter Graph G. Bestimme die kleinste natürliche Zahl k, so dass G ein Vertex Cover der Größe k hat.