Theoretische Informatik 1 / Algorithmentheorie

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser,
Dipl. Inf. Matthias Poloczek

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 11

Ausgabe: 31.01.2013
Abgabe: 07.02.2013 **vor** der Vorlesung

11.1. Problem (8)

Zeige die nachfolgenden Reduktionen.

a.) Wir betrachten die spezielle Universalsprache

$$U_\epsilon = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert } \epsilon\}.$$

Zeige die Reduktion $H_\epsilon \leq U_\epsilon$, wobei H_ϵ das spezielle Halteproblem ist. Also ist U_ϵ nicht entscheidbar.

b.) **Zeige** über eine Reduktion ausgehend von der universellen Sprache U, dass die Sprache

$$\left\{ \langle M \rangle w \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } M \text{ durchläuft Zustand 1 für Eingabe } w \end{array} \right\}$$

nicht entscheidbar ist.

11.2. Problem (9)

Wende den Satz von Rice an, um die Unentscheidbarkeit der folgenden Sprachen zu zeigen.

a.)

$$L_a = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } L(M) \text{ ist nicht leer.} \end{array} \right\}$$

b.)

$$L_b = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } L(M) \text{ ist in } \mathsf{P}. \end{array} \right\}$$

Wir können also für ein als Turingmaschine gegebenes Problem nicht entscheiden, ob es einen effizienten Algorithmus besitzt.

c.) Das Verifikationsproblem: Für eine endliche Menge $X \subseteq \Sigma^*$ von Worten ist zu überprüfen, ob eine Turingmaschine M genau die Worte in X akzeptiert.

$$L_c = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist eine deterministische Turingmaschine} \\ \text{und } L(M) = X. \end{array} \right\}$$

11.3. Problem (6)

Es sei $L_{non-blank}$ die folgende Sprache

$$L_{non-blank} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ schreibt für Eingabe } \epsilon \text{ irgendwann ein Nicht-Blank auf's Band}\}$$

a.) **Zeige**, dass die Sprache $L_{non-blank}$ entscheidbar ist.

b.) Nun führen wir einen Beweis vor, der zeigt, dass die Sprache $L_{non-blank}$ doch nicht entscheidbar ist.

Wir definieren die Sprache $L_\#$ durch

$$L_\# = \{\langle M \rangle \mid M \text{ schreibt für Eingabe } \epsilon \text{ irgendwann das Symbol \# auf's Band}\}.$$

Es kann gezeigt werden, dass $L_\#$ nicht entscheidbar ist. Als nächstes beschreiben wir eine Reduktion von $L_{non-blank}$ auf $L_\#$ und zeigen damit, dass $L_{non-blank}$ nicht entscheidbar ist.

Für eine TM M, als Eingabe für $L_{non-blank}$, konstruieren wir eine TM M' als Eingabe für $L_\#$ wie folgt:

1. M' hat das gleiche Band-Alphabet wie M und zusätzlich das Zeichen #.
2. M' hat die gleiche Zustandsmenge wie M.
3. Die Überführungsfunktion von M' ist die von M mit der Ausnahme, dass jede Regel, bei der ein Nicht-Blank geschrieben wird, durch die Regel: "schreibe # und halte" ersetzt wird.

Damit ist bewiesen, dass M gestartet auf dem leeren Band genau dann ein Nicht-Blank schreibt, wenn M' gestartet auf dem leeren Band das Zeichen # schreibt. Nach dem Reduktionsprinzip folgt, dass die Sprache $L_{non-blank}$ nicht entscheidbar ist.

Finde das fehlerhafte Argument und **begründe** deine Antwort.

11.4. Problem (2+5)

Zeige oder **widerlege**:

a.) Eine Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ist rekursiv aufzählbar $\Longleftrightarrow$ $\overline{L}$ ist entscheidbar.

b.) Eine Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ist rekursiv aufzählbar $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine deterministische TM M, die nacheinander, in irgendeiner Reihenfolge, alle Worte aus L auf ihr Band schreibt.

Beachte: Die in den Übungen erreichbare Gesamtpunktzahl ist 24·#Übungsblätter. Auf diesem Aufgabenblatt sind 30 Punkte erreichbar. Also können bis zu sechs Extrapunkte erzielt werden; schwächere Leistungen in anderen Blättern können somit kompensiert werden.